This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

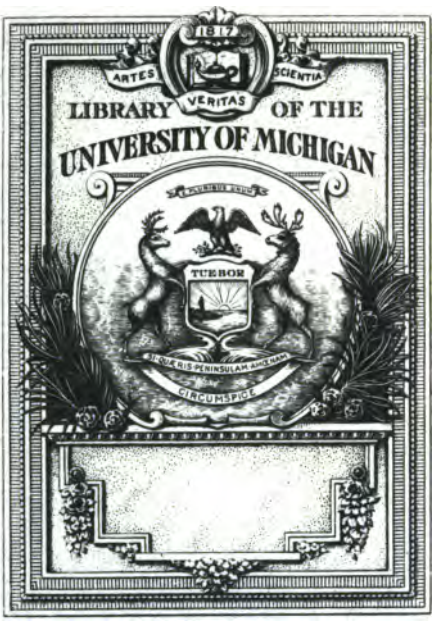
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF

Mrs. John O. Reed

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

DIOPTRIK

DER

LINSEN-SYSTEME

VON

Dr. H. ZINKEN gen. SOMMER,

PROFESSOR AM COLLEGIUM CAROLINUM ZU BRAUNSCHWEIG.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1870.

ANKÜNDIGUNG.

An der Vervollkommnung, welche die Photographie in der letzten Zeit erfahren und auch ferner zweifellos zu gewärtigen hat, ist die photographische Optik in hohem Grade betheiligt. Im Gegensatze zu den Anforderungen, welche früher an die Leistungen von Linsensystemen, besonders bei Fernröhren und Mikroskopen gemacht wurden, verlangt die Photographie von der ihr dienstbaren Dioptrik die Herstellung eines möglichst ausgedehnten, ebenen, in allen seinen Theilen scharfen Bildes. Wenn nun auch praktische Resultate nach dieser Richtung hin schon seit längerer Zeit vorliegen, so fehlt es doch noch an einer systematischen Untersuchung der Bedingungen für ebene und coincidirende Bildflächen, sowie der damit zusammenhängenden Fragen. Auch sind die Vortheile, welche die Einführung der Gauss'schen Hauptpuncte gewährt, noch nicht für die Wegschaffung der bekannten Abweichungen eines Linsensystemes verwerthet. Diese Lücken in der Literatur der Dioptrik auszufüllen und dadurch die Herstellung optischer Apparate zu fördern, ist der Zweck der vorliegenden Schrift.

QC
385
.S69

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

DIOPTRIK

DER

LINSEN-SYSTEME.

Die praktische Optik der neueren Zeit, besonders die Herstellung der photographischen Objective, bei welchen das entworfene Bild in grösserer Ausdehnung zur Verwendung gelangt, stellt ausserdem die Untersuchung der Bildfläche als unabweisbare Nothwendigkeit hin. Den ersten Schritt zur Bestimmung derselben unternahm ich in einer Abhandlung: „Ueber die Berechnung der Bildkrümmung bei optischen Apparaten," mitgetheilt im 95. Bande von Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Die dort im Keime sich vorfindende Betrachtungsweise wurde hier auf die Brechung durch beliebig viele Kugelflächen, sowie auf die Abbildung durch Strahlen, die zur Achse windschief, ausgedehnt und in ihren Consequenzen weiter verfolgt. So ergaben sich Formeln, welche für irgend ein dioptrisches System die Möglichkeit gewähren, die Forderung, dass die, verschiedenen Strahlengruppen zugehörigen Bildflächen zusammenfallen und ein ebenes oder mit willkürlicher Scheitelkrümmung behaftetes Bild resultire, durch Bedingungsgleichungen, welche in einer merkwürdigen Beziehung zur sphärischen Abweichung in der Achse und seitwärts von der Achse stehen, auszudrücken.

Braunschweig, im April 1870.

H. Sommer.

INHALT.

Seite

Einleitung 1

Erster Theil. Weg eines die Achse schneidenden Lichtstrahles durch ein Linsensystem, unter Berücksichtigung der Entfernungen und Dicke der Linsen, sowie der sphärischen Abweichung erster Ordnung 5

1. Brechung durch eine Kugelfläche 5
2. Brechung durch eine Linse 8
3. Brechung durch eine Doppellinse 20
4. Brechung durch ein System von Linsen 31

Zweiter Theil. Beschaffenheit des Bildes, welches ein Linsensystem von einem gegebenen Objecte entwirft 33

1. Abbildung eines leuchtenden Punktes 33

a) Der leuchtende Punkt liege in der Achse des Systems 33

b) Der leuchtende Punkt liege nicht in der Achse des Systems 38

α) Abbildung durch einen die Achse schneidenden Strahl 38

β) Abbildung durch einen zur Achse windschiefen Strahl 44

2. Abbildung eines Complexes von leuchtenden Punkten, welche in einer zur Achse des Systems gehörenden Rotationsfläche liegen 51

a) Bestimmung der Bildfläche 51

α) nach der Brechung durch eine Kugelfläche . 51

β) nach der Brechung durch eine Linse, mit Berücksichtigung der Linsendicke 56

γ) nach der Brechung durch mehrere Linsen, mit Berücksichtigung der Entfernungen und Dicken der Linsen 62

Seite

b) Die Treue der Abbildung 66
c) Der Bildwinkel 69
d) Vergleichung der Grösse von Bild und Object; Discussion des Bildortes 73
e) Vergleichung der Bildgrösse bei verschiedenen Apparaten 76
f) Centrale Helligkeit des Bildes 77
g) Farbenabweichung des Bildes 78

3. Abbildung eines beliebig im Raume vertheilten Complexes von leuchtenden Punkten 91

Dritter Theil. Berechnung des Systems, welches ein gegebenes Object in vorgeschriebener Weise abbilden soll; Leistungen der einzelnen Systeme 95

1. Die Camera obscura mit einer kleinen Oeffnung ohne Linse 95
2. Eine Linse 96
3. Zwei Linsen 99
4. Theorie der Doppelobjective 105

Vierter Theil. Genaue Bestimmung des gebrochenen Strahles, sowie der Aenderungen, welche seine Lage erleiden kann; Correction der Elemente des Systems 144

1. Der einfallende und folglich auch jeder gebrochene Strahl liege mit der Achse des Systems in einer Ebene 144
2. Der einfallende und folglich auch jeder gebrochene Strahl sei windschief zur Achse des Systems 153

Anmerkung. Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf ein Doppel-Objectiv hat eine sehr complicirte Bezeichnungsweise nothwendig gemacht. Der bessern Unterscheidung halber sind dabei die grossen Buchstaben des griechischen Alphabets aufrecht, die des lateinischen aber schräg gesetzt. Dass in Bezug hierauf Seite 32 einige leicht zu verbessernde Versehen enthält, wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen.

EINLEITUNG.

Die Fundamentalaufgabe der Dioptrik, den Weg eines Lichtstrahls durch ein System von Medien zu verfolgen, darf, wenn man die Anwendung auf die Brechung durch ein System von Linsengläsern beabsichtigt, auf den Fall beschränkt werden, in welchem diese Medien homogen und durch solche Kugelflächen von einander getrennt sind, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer geraden Linie, der Achse des Systems, liegen. Gestützt auf die im ersten Theile der vorliegenden Schrift unternommene Lösung dieser Aufgabe vermögen wir im zweiten Theile den Ort und die Eigenschaften des Bildes zu ermitteln, welches die von einem Complexe leuchtender Punkte — dem Objecte — ausgehenden Strahlen liefern; wir können angeben, wie die Mängel dieses Bildes, welche hauptsächlich in der nicht vollständig zu erreichenden Vereinigung der von einem Objectpunkte ausgehenden Strahlen in einem einzigen Bildpunkte ihren Grund haben, von der Beschaffenheit des vorliegenden Systems brechender Flächen abhängen. Umgekehrt muss es dann die Aufgabe des dritten Theiles sein, Linsensysteme derart herzustellen, dass Bilder von den geforderten Eigenschaften, also auch bis zu einem gewissen Grade frei von den angeführten Mängeln erscheinen. Es liegt in der Natur der Sache, dass die in Rede stehenden Rechnungen niemals vollständig genau durchzuführen sind und dass demnach das ermittelte dioptrische System auch nur näherungsweise den gestellten Anforderungen entspricht; im vierten Theile wird daher noch die Correction der für die Elemente des Systems gewonnenen Näherungswerthe anzugeben sein.

Die bisherige Theorie beschäftigte sich wesentlich nur mit der Herstellung der Fernröhre und Mikroskope, und da es bei diesen Instrumenten hauptsächlich erforderlich, in der Mitte des Gesichtsfeldes ein möglichst scharfes vergrössertes Bild herzustellen, die Beschaffenheit des Bildes am Rande aber von geringer Wichtigkeit ist, so genügte die Aufhebung der chromatischen und sphärischen Abweichung in der Achse. Schon in Betreff einer dritten Forderung war der Willkür Spielraum gelassen, und in der That sind, um diese Unbestimmtheit zu heben, von Euler, Klügel, von Littrow, Barlow, Herschel und Gauss ohne zwingenden Grund verschiedene Annahmen gemacht worden, welche Grunert (Optische Untersuchungen, II, S. 163) zusammenstellte und seinen Rechnungen zu Grunde legte.

Seit der Erfindung Daguerre's ist aus der Camera obscura ein für Kunst und Wissenschaft höchst wichtiger Apparat geworden, und da die Bilder derselben in beträchtlicher Ausdehnung benutzt und auf einer fast ausnahmslos ebenen Fläche aufgefangen werden sollen, so ergiebt sich auch für die Theorie die Nothwendigkeit, einen allgemeineren Standpunkt als bisher einzunehmen und ausser chromatischer und sphärischer Centralabweichung die sämmtlichen anderen Eigenschaften eines dioptrischen Bildes in Untersuchung zu ziehen.

Es sind demnach zu betrachten:

1. Die Vergrösserung.
2. Die Ausdehnung des Bildes, auch Gesichtsfeld oder Bildwinkel genannt.
3. Die Helligkeit.
4. Die richtige Zeichnung oder Treue der Abbildung.
5. Die sogenannte Tiefe des Focus, d. h. der Grad der Schärfe, in welchem Objecte verschiedener Entfernung auf einer Fläche abgebildet erscheinen.
6. Die sphärische Abweichung, oder die Abweichung wegen der Kugelgestalt der brechenden Flächen in der Achse.
7. Die Krümmung der Bildfläche im Scheitel.
8. Die sphärische Abweichung am Rande des Bildes.
9. Die chromatische oder Farbenabweichung in der Achse.

Für die Wegschaffung der verschiedenen Mängel erhalten wir Bedingungen, welche fast immer sich gegenseitig beeinträchti-

gen, so dass es nicht möglich ist, ein in jeder Beziehung fehlerfreies Bild herzustellen. Hat sich aber ergeben, wie die Eigenschaften des Bildes von den Elementen des Systems abhängen, so kann entweder eine Ausgleichung der Mängel erzielt, oder, je nach dem zu erreichenden Zwecke das Bild nach einer Richtung hin, aber dann auf Kosten der anderen Eigenschaften, besonders vorzüglich gemacht werden.

ERSTER THEIL.

Um eine mathematische Grundlage für die Beurtheilung der vorstehend angeführten Eigenschaften eines dioptrischen Bildes zu gewinnen, ist es zunächst erforderlich, den Weg eines Strahles durch das System zu verfolgen. Da dem Brechungsgesetze zufolge der durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth bestimmten Ebene auch der gebrochene Strahl angehört, so wird, wenn wir unsere Betrachtung vorerst durch die Annahme beschränken, dass der zuerst eintretende Strahl in einer durch die Achse gehenden Ebene liege, auch der Lichtstrahl, auf seinem ganzen Wege durch das System, aus dieser Achsenebene nicht heraustreten können.

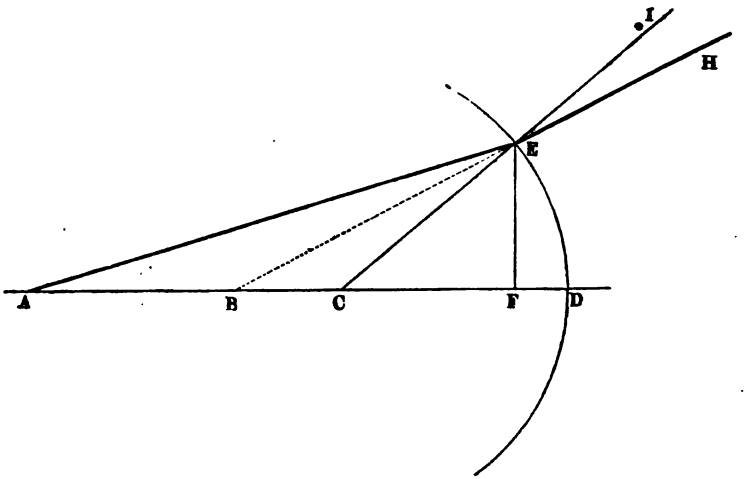
1. Brechung durch eine Kugelfläche,

mit Berücksichtigung der sphärischen Abweichung erster Ordnung.

Es sei in Figur 1 (a. f. S.)
EDG ein Achsenschnitt der brechenden Kugelfläche,
C deren Mittelpunkt,
$CE = CD = r$ deren Halbmesser,
$ABCD$ die Achse des Systems,
AE der einfallende Strahl, die Achse in der Entfernung,
$AD = k$ vom Flächenscheitel D durchschneidend,
EH der gebrochene Strahl, dessen Richtung die Achse in der Entfernung
$BD = l$ vom Flächenscheitel D durchschneidet,

$EF = h$ das vom Einfallspunkte E auf die Achse gefällte Loth und $1 : n$ das Brechungsverhältniss aus dem ersten in das zweite Mittel.

Fig. 1.



Es sollen die Strecken r, k und l dann positiv genommen werden, wenn resp. C, A und B im ersten Mittel sich befinden. Die schon ausgesprochene Beschränkung auf Glieder der sphärischen Abweichung erster Ordnung gestattet die Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von h gegen r, k und l, ist also auf die Voraussetzung gegründet, dass nur Strahlen betrachtet werden, welche in geringer Entfernung von der Achse und unter geringer Neigung gegen dieselbe einfallen.

Die Figur ergiebt zunächst die Gleichungen

$$\left(\frac{\sin ECD}{\sin AEC}\right)^2 = \frac{AE^2}{AC^2}$$

$$= \frac{(k-r)^2 + 2(k-r)r\cos ECD + r^2}{(k-r)^2}$$

$$= \frac{k^2 - 2(k-r)r(1-\cos ECD)}{(k-r)^2}.$$

Da nun

$$r(1-\cos ECD) = FD,$$

also mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von h

$$r(1-\cos ECD) = \frac{h^2}{2r}$$

zu setzen ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{\sin ECD}{\sin AEC}\right)^2 = \frac{k^2 - \frac{(k-r)h^2}{r}}{(k-r)^2}$$

und, wenn unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von h radicirt wird,

$$\frac{\sin ECD}{\sin AEC} = \frac{k - \frac{1}{2}\frac{k-r}{kr}h^2}{k-r}.$$

Eine ähnliche Rechnung ergiebt, dass

$$\frac{\sin ECD}{\sin BEC} = \frac{l - \frac{1}{2}\frac{l-r}{lr}h^2}{l-r}.$$

Das Brechungsgesetz verlangt, dass

$$\frac{\sin AEC}{n} = \frac{\sin HEJ}{1} = \frac{\sin BEC}{1},$$

oder auch

$$\frac{\sin ECD}{\sin BEC} = n\frac{\sin ECD}{\sin AEC}$$

werde; führen wir nun die vorhin entwickelten Werthe ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{l - \frac{1}{2}\frac{l-r}{lr}h^2}{l-r} = n\frac{k - \frac{1}{2}\frac{k-r}{kr}h^2}{k-r},$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)h^2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{l}} = n\frac{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)h^2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{k}},$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)h^2$$

$$= \frac{n}{r} - \frac{n}{l} - \frac{1}{2}\frac{n}{k}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)h^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

oder auch

$$\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - \frac{1}{2n^2}\left(\frac{n^2}{k} - \frac{n}{l}\right)\left(\frac{n}{r} - \frac{n}{l}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)h^2.$$

Wir unterscheiden in dieser und jeder ähnlichen Gleichung Glieder erster Ordnung, welche von h unabhängig sind, und solche von zweiter Ordnung, welche in h^2 multiplicirt und den gemachten

Voraussetzungen zufolge gegen die ersteren klein sind. Da wir uns auf diese Glieder beschränken und die in h^4 multiplicirten Werthe vernachlässigen, so wird es stets gestattet sein, die Beziehung zwischen den Gliedern erster Ordnung, im vorliegenden Falle also die Gleichung $\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r}$ zur Substitution in die Glieder zweiter Ordnung und somit zur Vereinfachung derselben zu benutzen. Dieses Verfahren ergiebt:

$$\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2 h^2 \quad . \quad (2)$$

oder auch

$$\frac{1}{k} = \frac{n}{l} - \frac{n-1}{r} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n+1}{l} - \frac{n}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)^2 h^2 \quad . \quad (3)$$

Für Strahlen, welche mit der Achse zusammenfallen, wird $h = 0$ und

$$\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder

$$\frac{1}{k} = \frac{n}{l} - \frac{n-1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

2. Brechung durch eine Linse,

mit Berücksichtigung der Linsendicke und der sphärischen Abweichung erster Ordnung.

C. F. Gauss gebührt das Verdienst, zuerst den Weg eines Lichtstrahles durch ein System brechender Kugelflächen auch mit Berücksichtigung der Entfernungen der Flächenscheitel verfolgt zu haben. In der Abhandlung „Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841." liefert derselbe den Nachweis, dass die für eine Linse ohne Dicke geltenden Sätze mit einer leichten Modification auf eine Linse von bestimmter Dicke, und sogar auf ein beliebiges System, derselben Achse angehöriger Kugelflächen übertragen werden dürfen. Da Gauss' Betrachtungen nur unter der Voraussetzung gelten, dass sowohl die Lichtstrahlen, als auch die Einfallslothe unter verschwindend kleinen Winkeln gegen die Achse geneigt sind, da somit die Gauss'sche Theorie auch die Glieder der sphärischen Abweichung von erster Ordnung vernachlässigt, so dürfen wir an dieser Stelle nicht darauf verzichten, mit Berück-

sichtigung dieser Glieder die Gauss'sche Theorie in erweiterter Form zu entwickeln.

Es seien

r^0 und r die Halbmesser der vorderen und hinteren Linsenfläche,

h^0 und h die Achsenentfernungen der Einfallspunkte an der vorderen und hinteren Linsenfläche,

n : 1 das Brechungsverhältniss für den Uebergang von Luft in Glas,

d die Achsendicke der Linse.

Die Achse der Linse werde durchschnitten

von dem an der Vorderfläche einfallenden Strahle in der Entfernung k^0 vom Scheitel der Vorderfläche,

von dem an der Vorderfläche gebrochenen Strahle in der Entfernung l^0 vom Scheitel der Vorderfläche,

von dem an der Hinterfläche einfallenden Strahle in der Entfernung l vom Scheitel der Hinterfläche und

von dem an der Hinterfläche gebrochenen Strahle in der Entfernung k vom Scheitel der Hinterfläche.

Diese Entfernungen sind stets in demselben Sinne, wie im vorigen Artikel zu nehmen.

Die Brechung an der Vorderfläche liefert die Gleichung

$$\frac{n}{l^0} = \frac{1}{k^0} + \frac{n-1}{r^0} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2 h^{0\,2}$$

oder, wenn wir

$$\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2 = s^0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen,

$$\frac{n}{l^0} = \frac{1}{k^0} + \frac{n-1}{r^0} - s^0 h^{0\,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Für die hintere Fläche erhalten wir die Gleichung in der brauchbarsten Form, wenn wir die Bemerkung benutzen, dass der dort gebrochene Strahl, in gleicher Richtung rückwärts laufend, den früheren Weg wieder einschlagen würde. Verfolgen wir daher diese zweite Brechung in umgekehrter Richtung, d. h. so, als ob der Strahl aus dem umgebenden Medium in die Linse getreten wäre, so dürfen wir die Gleichung (2) wieder anwenden, wenn wir berücksichtigen, dass nun der einfallende Strahl die Achse in der Entfernung $-k$, der gebrochene Strahl dieselbe in der Entfernung $-l$ vom Scheitel durchschneidet, und wenn wir $-r$ als Halb-

messer, sowie n als Brechungsverhältniss einführen. Es ergiebt sich danach

$$\frac{n}{-l} = \frac{1}{-k} + \frac{n-1}{-r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{-k} - \frac{1}{-r}\right)\left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{-k}\right)^2 h^2$$

oder auch

$$\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2 h^2$$

und, wenn wir

$$\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2 = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

setzen,

$$\frac{n}{l} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - s.h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ehe wir nun dazu übergehen können, durch Verbindung der Gleichung (7) und (9) eine für die Brechung durch die ganze Linse geltende Gleichung aufzustellen, ist es erforderlich, die von Gauss herrührenden Definitionen der Brennweite und der Hauptpunkte einer Linse anzuführen.

Unter Brennweite einer Linse versteht derselbe den Werth f, wenn

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r^0}\cdot\frac{d}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gesetzt wird. Die Gauss'schen Hauptpunkte der Linse liegen auf der Achse derselben, und zwar der erste in der Entfernung e^0 vom Scheitel der Vorderfläche, der zweite in der Entfernung e vom Scheitel der Hinterfläche. Nehmen wir, wie dies immer geschehen soll, die Werthe e^0 und e dann als positiv an, wenn die Hauptpunkte auf der Seite der einfallenden Strahlen liegen, so ist

$$\frac{n-1}{r} f \frac{d}{n} \quad \text{und} \quad e = -\frac{n-1}{r^0} f \frac{d}{n} \quad . \quad . \quad (11)$$

zu setzen. Es finden danach folgende Beziehungen selbstverständlich Statt:

$$\frac{e^0}{r^0} = \frac{e}{r} = -\frac{n-1}{r^0 r}\cdot f \cdot \frac{d}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$e - e^0 + \frac{ee^0}{f} = \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{n-1}{r^0}\cdot\frac{d}{n}\right) f \cdot \frac{d}{n}$$

oder

$$e - e^0 + \frac{ee^0}{f} = \frac{d}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Abhängigkeit des gebrochenen vom einfallenden Strahle lässt sich bedeutend einfacher darstellen, wenn beide nicht auf die resp. Flächenscheitel, sondern auf die zugehörigen Hauptpunkte bezogen werden. Dass dieses der Fall, soll stets durch Wahl liegender Buchstaben an Stelle der entsprechenden bis jetzt verwendeten aufrechten angedeutet werden, und haben wir demnach vorauszusetzen, dass der an der Vorderfläche einfallende Strahl die Achse in der Entfernung k^0 vom ersten Hauptpunkte, der an der Hinterfläche gebrochene Strahl dieselbe in der Entfernung k vom zweiten Hauptpunkte durchschneide. Nehmen wir diese Werthe in demselben Sinne, wie früher $\mathfrak{k}^0$ und $\mathfrak{k}$, so wird

$$\mathfrak{k}^0 = k^0 + \mathfrak{e}^0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{k} = k + \mathfrak{e}$$

oder auch

$$\frac{1}{\mathfrak{k}^0}\left(1 + \frac{\mathfrak{e}^0}{k^0}\right) = \frac{1}{k^0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{k}}\left(1 + \frac{\mathfrak{e}}{k}\right) = \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Führen wir nun noch die Werthe r^0 und r, den Gleichungen

$$\frac{1}{\mathfrak{r}^0}\left(1 + \frac{\mathfrak{e}^0}{k^0}\right) = \frac{1}{r^0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{r}}\left(1 + \frac{\mathfrak{e}}{k}\right) = \frac{1}{r} \quad . \quad . \quad (15)$$

zufolge, ein, so ergiebt die Subtraction der Gleichungen (7) und (9):

$$\frac{1 - l^0}{n} \cdot \frac{n}{l^0} \cdot \frac{n}{l} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r^0} - \frac{n-1}{r} - s^0 h^{02} + s h^2.$$

Da aber $1 - l^0 = d$ ist und für $\frac{n}{l^0}$ und $\frac{n}{l}$ die Werthe aus den Gleichungen (7) und (9) entnommen werden können, so wird auch

$$\frac{d}{n}\left(\frac{1}{k^0} + \frac{n-1}{r^0} - s^0 h^{02}\right)\left(\frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - s h^2\right)$$
$$= \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r^0} - \frac{n-1}{r} - s^0 h^{02} + s h^2.$$

Die weitere Entwickelung dieser Gleichung liefert unter Vernachlässigung des in $h^{02} \cdot h^2$ multiplicirten Gliedes

$$\frac{1}{k k^0}\frac{d}{n} + \frac{1}{k^0} \cdot \frac{n-1}{r}\frac{d}{n} + \frac{1}{k} \cdot \frac{n-1}{r^0}\frac{d}{n}$$
$$= \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r^0} - \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} \cdot \frac{n-1}{r} \cdot \frac{d}{n}$$
$$- \left(1 - \frac{1}{k}\frac{d}{n} - \frac{n-1}{r}\frac{d}{n}\right) s^0 h^{02} + \left(1 + \frac{1}{k^0}\frac{d}{n} + \frac{n-1}{r^0}\frac{d}{n}\right) s h^2$$

und unter Berücksichtigung der Gleichung (10) und (11)

$$\frac{1}{k k^0}\cdot\frac{d}{n}-\frac{1}{k^0}\cdot\frac{e^0}{f}-\frac{1}{k}\cdot\frac{e}{f}=\frac{1}{k^0}-\frac{1}{k}-\frac{1}{f}-\left(1-\frac{1}{k}\frac{d}{n}+\frac{e^0}{f}\right)s^0h^{02}$$
$$+\left(1+\frac{1}{k^0}\frac{d}{n}-\frac{e}{f}\right)sh^2.$$

Multipliciren wir die vorstehende Gleichung mit $\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\cdot\left(1+\frac{e}{k}\right)$ und benutzen zur Vereinfachung die Gleichung (14), so erhalten wir

$$\frac{1}{k k^0}\frac{d}{n}-\frac{1}{k^0}\left(1+\frac{e}{k}\right)\frac{e^0}{f}-\frac{1}{k}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\frac{e}{f}$$
$$=\frac{1}{k^0}\left(1+\frac{e}{k}\right)-\frac{1}{k}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)-\frac{1}{f}\left(1+\frac{e}{k}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)$$
$$-\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e}{k}-\frac{1}{k}\frac{d}{n}+\frac{e^0}{f}+\frac{e^0e}{f}\cdot\frac{1}{k}\right)s^0{}^0h^2$$
$$+\left(1+\frac{e}{k}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}+\frac{1}{k^0}\frac{d}{n}-\frac{e}{f}-\frac{e^0e}{f}\cdot\frac{1}{k^0}\right)sh^2$$

oder zusammengezogen,

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k^0}-\frac{1}{f}+\frac{1}{k^0k}\left(e-e^0+\frac{ee^0}{f}-\frac{d}{n}\right)$$
$$-\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{f}+\frac{1}{k}\left(e+\frac{e^0e}{f}-\frac{d}{n}\right)\right)s^0h^{02}$$
$$+\left(1+\frac{e}{k}\right)\left(1-\frac{e}{f}+\frac{1}{k^0}\left(e^0-\frac{e^0e}{f}+\frac{d}{n}\right)\right)sh^2$$

und auf Gleichung (13) gestützt

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k^0}-\frac{1}{f}-\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{f}+\frac{e^0}{k}\right)s^0h^{02}$$
$$+\left(1+\frac{e}{k}\right)\left(1-\frac{e}{f}+\frac{e}{k^0}\right)sh^2.$$

Da endlich die Beziehung zwischen den Gliedern der ersten Dimension zur Vereinfachung derer von zweiter Dimension verwendet werden darf, so ergiebt sich

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k^0}-\frac{1}{f}-\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)^2s^0h^{02}+\left(1+\frac{e}{k}\right)^2sh^2 \quad . \quad (16)$$

und für Strahlen, welche mit der Achse zusammenfallen,

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k^0}-\frac{1}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Es ist bemerkenswerth, dass nach Einführung der Hauptpunkte die Beziehung zwischen den Gliedern erster Dimension dieselbe ist, welche, als für Linsen ohne Dicke geltend, schon längst bekannt war; die strenge Berücksichtigung der Dicke hat daher in diesen Gliedern gar keine, in denen der zweiten Dimension nur eine sehr geringe Complication zur Folge.

Für späteren Gebrauch entwickeln wir hier, auf Glieder erster Dimension uns beschränkend, den Werth

$$\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} = \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{e}{r}\cdot\frac{n-1}{k} - \frac{e^0}{r^0}\cdot\frac{n-1}{k^0}$$

$$= \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{r^0 r}\, f\, \frac{d}{n}\cdot\frac{n-1}{f}$$

und erhalten demnach die Beziehung

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Die an Stelle der Radien tretenden Werthe r^0 und r gestatten daher, die Brennweite nach der für Linsen ohne Dicke geltenden Formel zu bestimmen.

Ebenso ermitteln wir, bis auf Glieder erster Dimension genau den Werth

$$\frac{n}{l}\left(1+\frac{e}{k}\right) - \frac{n}{l^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^0} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} = 0$$

und setzen, hierauf gestützt

$$\frac{1}{l}\left(1+\frac{e}{k}\right) = \frac{1}{l^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right) = \frac{1}{l} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Der im Inneren der Linse verlaufende Strahl trifft die Vorder- und Hinterfläche derselben in den Einfallspunkten und bedingt somit den Zusammenhang zwischen h^0 und h. Soll die Entwickelung des Werthes $\frac{h}{h^0}$ nur behuf der Substitution in die Glieder der sphärischen Abweichung erfolgen, so dürfen wir uns auf Glieder erster Ordnung beschränken und erhalten

$$\frac{h}{h^0} = \frac{l}{l^0}$$

oder auch, wenn das letztere Verhältniss aus Gleichung (19) entnommen wird,

$$\frac{h}{h^0} = \frac{1+\frac{e}{k}}{1+\frac{e^0}{k^0}}$$

so dass offenbar

$$\frac{h^0}{1+\frac{e^0}{k^0}} = \frac{h}{1+\frac{e}{k}} = h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

gesetzt werden darf. Da, wie leicht ersichtlich, der erstere Bruch die Achsenentfernung desjenigen Punktes, in welchem das im ersten Hauptpunkte auf der Achse errichtete Loth vom einfallenden Strahle, der letztere Bruch aber die Achsenentfernung desjenigen Punktes darstellt, in welchem das im zweiten Hauptpunkte auf der Achse errichtete Loth vom gebrochenen Strahle getroffen wird, so ist nachgewiesen, dass beide Lothe vom einfallenden, resp. dem die Linse verlassenden Strahle in der gleichen Höhe h durchschnitten werden.

Ersetzen wir in Gleichung (16) die Werthe h^0 und h durch den auf die Hauptpunkte der Linse bezogenen Werth h, so gewinnt diese Gleichung die Form:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{f} - \left(1+\frac{e_0}{k^0}\right)^4 s^0 \cdot h^2 + \left(1+\frac{e}{k}\right)^4 s h^2$$

oder auch

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{f} - s \cdot h^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

wenn unter s der Werth

$$s = \left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)^4 \quad - \left(1+\frac{e}{k}\right)^4 s$$

verstanden wird. Die weitere Entwickelung dieses für die sphärische Abweichung der Linse massgebenden Werthes s ergiebt, den Gleichungen (6) und (8) zufolge

$$s = \left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)^4 \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2$$
$$- \left(1+\frac{e}{k}\right)^4 \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2$$

und, unter Berücksichtigung der Gleichung (14) und (15)

$$s = \frac{n-1}{2n^2}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2$$
$$- \frac{n-1}{2n^2}\left(1+\frac{e}{k}\right)\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2$$

und, wenn wir die Bezeichnungen

$$\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)^2 = {}^*s^0$$

und $$\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right) = {}^*s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

einführen

$$s = \left(1+\frac{e^0}{k^0}\right){}^*s^0 - \left(1+\frac{e}{k}\right){}^*s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

oder

$$s = {}^*s^0 - {}^*s + \frac{e^0}{k^0}\,{}^*s^0 - \frac{e}{k}\,{}^*s.$$

Hierin ist

$${}^*s^0 - {}^*s = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)^2 - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)^2$$

und, wenn wir die Gleichung (17) und (18) zur Elimination von k und r benutzen,

$${}^*s^0 - {}^*s = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)^2 - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}-\frac{n^2}{(n-1)f}\right)\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{k^0}+\frac{n}{(n-1)f}\right)^2$$

oder auch

$${}^*s^0 - {}^*s = \frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{r^{02}}+\frac{2n+1}{r^0}\cdot\frac{n}{(n-1)f} + \frac{n^3}{(n-1)^2f^2}-\frac{4n+4}{r^0k^0}-\frac{n}{(n-1)f}\cdot\frac{3n+1}{k^0}+\frac{3n+2}{k^{02}}\right].$$

Werden aber die Gleichungen (17) und (18) zur Elimination von k^0 und r^0 benutzt, so ergiebt sich

$${}^*s^0 - {}^*s = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}-\frac{n}{(n-1)f}\right)^2 - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)^2$$

oder auch

$${}^*s^0 - {}^*s = \frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{r^2}-\frac{2n+1}{r}\cdot\frac{n}{(n-1)f}+\frac{n^3}{(n-1)^2f^2} - \frac{4n+4}{rk}+\frac{n}{(n-1)f}\cdot\frac{3n+1}{k}+\frac{3n+2}{k^2}\right].$$

Es können danach die ersten, wichtigsten Glieder des Werthes

s sowohl durch die der Vorderfläche zugehörigen Werthe r^0 und k^0, als auch durch die der Hinterfläche zugehörigen Werthe r und k ausgedrückt werden, so dass wir entweder

$$s = \frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{r^{02}} + \frac{2n+1}{r^0}\cdot\frac{n}{(n-1)f} + \frac{n^3}{(n-1)^2 f^2} - \frac{4n+4}{r^0 k^0}\right.$$

$$\left. - \frac{n}{(n-1)f}\cdot\frac{3n+1}{k^0} + \frac{3n+2}{k^{02}}\right] + \frac{e^0}{k^0}\,{}^*s^0 - \frac{e}{k}\,{}^*s \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

oder

$$s = \frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{r^2} - \frac{2n+1}{r}\cdot\frac{n}{(n-1)f} + \frac{n^3}{(n-1)^2 f^2} - \frac{4n+4}{rk}\right.$$

$$\left. + \frac{n}{(n-1)f}\cdot\frac{3n+1}{k} + \frac{3n+2}{k^2}\right] + \frac{e^0}{k^0}\,{}^*s^0 - \frac{e}{k}\,{}^*s \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

erhalten.

Die Gleichung (21) giebt uns in Verbindung mit (24), (25) und (22) die Abhängigkeit der Punkte an, in welchen die Achse vom einfallenden und gebrochenen Strahle geschnitten wird, und da wir ebenfalls nachgewiesen, dass beide Strahlen die in den resp. Hauptpunkten errichteten Lothe in gleicher Entfernung von der Achse durchschneiden, so ist, allgemein zu reden, für jeden einfallenden Strahl der Weg nach der Brechung durch die Linse genügend bestimmt. Sämmtliche Werthe sind auf die Hauptpunkte bezogen und nur dadurch ist es möglich geworden, ohne irgend welche Vernachlässigung der Linsendicke die Betrachtungen durchzuführen.

Die vorstehenden Bestimmungen der Lage des gebrochenen Strahles verlieren ihre Anwendbarkeit nur für den Fall, in welchem $k^0 = 0$ ist, die Richtung des einfallenden Strahles also den ersten Hauptpunkt trifft. Wir nehmen vorläufig k^0 als sehr klein an, und da dann auch k sehr klein sein wird, so ergiebt die der Gleichung (16) vorhergehende Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k^0} - \frac{e^{02}}{kk^0}\,s^0\,h^{02} + \frac{e^2}{kk^0}\,s\,h^2$$

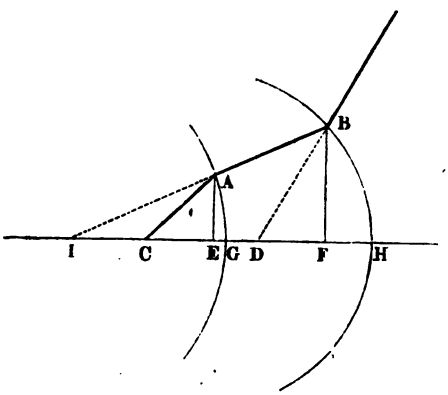
oder auch

$$k^* = k^0 + e^{02}\,s^0\,h^{02} - e^2\,s\,h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Da die in den Hauptpunkten errichteten und bis zum Durchschnitt mit den Strahlenrichtungen verlängerten Lothe sehr klein werden, so wird es für diesen Fall vorzuziehen sein, die Richtung der Strahlen durch ihre Neigung gegen die Achse zu bestimmen.

Die Richtung AC (Fig. 2) des einfallenden Strahles schliesse mit der Achse GH den Winkel 0^0, die des gebrochenen Strahles, BD, mit derselben den Winkel 0 ein. Die Richtung des im Inneren der Linse verlaufenden Strahles, AB schneide die Achse in J, und AE und BF seien die von den Incidenzpunkten auf die Achse gefällten Lothe. Unter Beibehaltung unserer früheren Bezeichnungen ergiebt sich zunächst

Fig. 2.



$$\frac{\frac{n}{l^0}}{\frac{n}{l}} = \frac{\frac{1}{k^0} + \frac{n-1}{r^0} - s^0 h^{02}}{\frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - s h^2} = \frac{\frac{1}{k^0 + e^0} + \frac{n-1}{r^0} - s^0 h^{02}}{\frac{1}{k+e} + \frac{n-1}{r} - s h^2}$$

und, da k^0 und k sehr klein sind,

$$\frac{\frac{n}{l^0}}{\frac{n}{l}} = \frac{e}{e^0} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0 - \frac{k^0}{e^0} - e^0 h^{02} e^0}{1 + \frac{n-1}{r} e - \frac{k}{e} - e h^2 e} \quad \ldots\ldots (27)$$

In Hinblick auf Gleichung (12) zeigt sich danach, dass unter Vernachlässigung von k^0 und k, sowie der Glieder von zweiter Dimension

$$\frac{\frac{n}{l^0}}{\frac{n}{l}} = \frac{l}{l^0} = \frac{e}{e^0} = \frac{r}{r^0}$$

zu setzen ist. Die Figur lehrt, dass

$$\frac{h}{h^0} = \frac{BF}{AE} = \frac{JH - FH}{JG - GE}$$

und wenn mit hier ausreichender Genauigkeit

$$GE = \frac{h^{02}}{2 r^0} \quad \text{und} \quad FH = \frac{h^2}{2r}$$

gesetzt wird,

$$\frac{h}{h^0} = \frac{1 - \frac{h^2}{2r}}{l^0 - \frac{h^{02}}{2r^0}} = \frac{l\left(1 - \frac{h^2}{2rl}\right)}{l^0\left(1 - \frac{h^{02}}{2r^0 l^0}\right)}$$

ist. Auf Glieder erster Dimension beschränkt, wird

$$\frac{h}{h^0} = \frac{l}{l^0} = \frac{e}{e^0} = \frac{r}{r^0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

und berücksichtigt man dieses in den Gliedern zweiter Dimension, so wird auch bis auf diese genau

$$\frac{h}{h^0} = \frac{l}{l^0} = \frac{\frac{n}{l^0}}{\frac{n}{l}} = \frac{e}{e^0} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0 - \frac{k^0}{e^0} - s^0 h^{02} e^0}{1 + \frac{n-1}{r} e - \frac{k}{e} - s h^2 e}.$$

Zur Vereinfachung dient ferner, dass, da in den Gliedern der sphärischen Abweichung e^0 für k^0 und e für k zu substituiren ist,

$$s^0 h^{02} e^0 = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{e^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{e^0}\right)^2 h^{02} e^0$$

$$= \frac{n-1}{2n^2}\left(n+1-\frac{e}{r^0}\right)\left(1 - \frac{e^0}{r^0}\right)^2 \frac{h^{02}}{e^{02}}$$

und

$$s h^2 e = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{e} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{e}\right)^2 h^2 e$$

$$= \frac{n-1}{2n^2}\left(n+1-\frac{e}{r}\right)\left(1 - \frac{e}{r}\right)^2 \frac{h^2}{e^2}$$

wird, und daher

$$s^0 h^{02} e^0 = s h^2 e = i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

gesetzt werden darf. Der für $\frac{h}{h^0}$ entwickelte Werth kann demnach auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\frac{h}{h^0} = \frac{e}{e^0} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0 - \frac{k^0}{e^0}}{1 + \frac{n-1}{r} e - \frac{k}{e}}.$$

Gehen wir zu den Winkeln über, so ergiebt die Figur, dass

$$tg\, 0^0 = \frac{AE}{CG - EG} = \frac{h^0}{k^0 - \frac{h^{02}}{2r^0}}, \quad tg\, 0 = \frac{BF}{DH - FH} = \frac{h}{k - \frac{h^2}{2r}}.$$

oder auch

$$tg\ 0^0 = \frac{h^0}{e^0 + k^0 - \frac{h^{02}}{2r^0}} = \frac{h^0}{e^0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k^0}{e^0} - \frac{h^{02}}{2e^0 r^0}}$$

und $$tg\ 0 = \frac{h}{e + k - \frac{h^2}{2r}} = \frac{h}{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{e} - \frac{h^2}{2er}}$$

ist. Nach Gleichung (28) ist $\frac{h^{02}}{2r^0 e^0} = \frac{h^2}{2re}$ und daher

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = \frac{h}{h^0} \cdot \frac{e^0}{e} \cdot \frac{1 + \frac{k^0}{e^0}}{1 + \frac{k}{e}}.$$

Wird nun der für $\frac{h}{h^0}$ entwickelte Werth eingesetzt, so ergiebt sich

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = \frac{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0 - \frac{k^0}{e^0}}{1 + \frac{n-1}{r} e - \frac{k}{e}} \cdot \frac{1 + \frac{k^0}{e^0}}{1 + \frac{k}{e}} = \frac{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0 + \frac{n-1}{r^0} k^0}{1 + \frac{n-1}{r} e + \frac{n-1}{r} k}$$

oder

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 + \frac{\frac{n-1}{r^0}}{1 + \frac{n-1}{r^0} e^0} k^0 - \frac{\frac{n-1}{r}}{1 + \frac{n-1}{r} e} k$$

und, nach Auswerthung der Brüche, den Gleichungen (10) und (11) zufolge,

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 + \frac{r}{r^0 - r} \cdot \frac{k^0}{f} + \frac{r^0}{r - r^0} \cdot \frac{k}{f}.$$

Da unter Benutzung von (29) die Gleichung (26) die einfachere Gestalt

$$k = k^0 + (e^0 - e)\ i$$

annimmt, so wird schliesslich

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 - \frac{k^0}{f} - \frac{e - e^0}{r - r^0} \frac{i}{f} r^0$$

oder

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 - \frac{k^0}{f} - i \frac{e^0}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

und ebenso würde sich ergeben

$$\frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 - \frac{k}{f} - i\,\frac{e}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Es zeigt sich daher, dass, mit Berücksichtigung der sphärischen Abweichung erster Ordnung, für $k^0 = 0$, d. h. wenn der einfallende Strahl den ersten Hauptpunkt trifft,

$$k = (e^0 - e)\,i \text{ und } \frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 - i\,\frac{e^0}{f} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

wird, und hierdurch ist der gebrochene Strahl hinreichend bestimmt. Will man die Linsendicke im Gliede der sphärischen Abweichung gegen die Radien vernachlässigen, so darf

$$i = \frac{n^2-1}{2n^2}\cdot\frac{h^{0^2}}{e^{0^2}} = \frac{n^2-1}{2n^2}\,tg^2\,0^0 \text{ und } e^0 - e = -\frac{d}{n}$$

gesetzt werden, wodurch

$$k = \frac{n^2-1}{2n^3}\,d\cdot tg^2\,0^0 \text{ und } \frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1 - \frac{n^2-1}{2n^2}\cdot\frac{e^0}{f}\,tg^2\,0^0$$

sich ergiebt. Unter Vernachlässigung der sphärischen Abweichung wird

$$k = 0 \text{ und } \frac{tg\ 0}{tg\ 0^0} = 1,$$

d. h. die Richtung des gebrochenen Strahles trifft den zweiten Hauptpunkt und ist jener des einfallenden Strahles parallel.

Setzen wir $k^0 = -i\,e^0$, so erhalten wir $k = -i\,e$ und $tg\ 0 = tg\ 0^0$. Diese Gleichungen geben an, unter welchen Bedingungen auch mit Berücksichtigung der sphärischen Abweichung erster Ordnung der gebrochene Strahl dem einfallenden parallel wird.

3. Brechung durch eine Doppellinse,

mit Berücksichtigung der Entfernung und der Dicke der Linsen, sowie der sphärischen Abweichung erster Ordnung.

Die eben entwickelten Sätze sind noch insofern einer Verallgemeinerung fähig, als sie auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn an Stelle der beiden brechenden Linsenflächen zwei selbstständige Linsen mit gemeinschaftlicher Achse treten.

Es mögen die Buchstaben

r^0, r, d, n, e^0, e, f, k^0, k, h^0, h, s^0, s

und ebenso

$$r^0,\ r,\ k^0,\ k,\ h,\ s,\ {}^*s^0,\ {}^*s$$

ihre Bedeutung in Bezug auf die erste Linse und den durch sie hindurch gehenden Strahl beibehalten, und

$$r_1,\ r_1^0,\ d_1,\ n_1,\ e_1,\ e_1^0,\ f_1,\ k_1,\ k_1^0,\ h_1,\ h_1^0,\ s_1,\ s_1{}^0$$

sowie auch

$$r_1,\ r_1^0,\ k_1,\ k_b^1,\ h_1,\ s_1,\ {}^*s_1,\ {}^*s_1^0$$

die entsprechende Bedeutung für die zweite Linse erhalten.

Nach dieser Bezeichnung ist die zweite Linse von der ersten durch den unteren Accent $_1$, die Aussenflächen sind von den inneren durch den oberen Accent ^{0} unterschieden; die liegenden Buchstaben deuten an, dass die betreffenden Werthe nicht auf die Flächenscheitel, sondern auf die zugehörigen Hauptpunkte bezogen sind.

Die Uebertragung der bisherigen Sätze auf die vorliegende Doppellinse kann nur dann geschehen, wenn wir auch für diese den Begriff der Brennweite und zwei auf der Achse befindliche Hauptpunkte einführen. Wir nennen zu dem Ende:

D die Strecke vom zweiten Hauptpunkte der Vorder- bis zum ersten Hauptpunkte der Hinterlinse; ein Werth, der durch die Entfernung der Linsen bedingt, und dann positiv zu nehmen ist, wenn er in der Richtung der fortschreitenden Lichtstrahlen liegt;

E die Strecke vom ersten Hauptpunkte der Vorder- bis zum ersten Hauptpunkte der Doppellinse;

E_1 die Strecke vom zweiten Hauptpunkte der Hinter- bis zum zweiten Hauptpunkte der Doppellinse; der ursprüngliche Sinn dieser beiden Werthe ist der Richtung der fortschreitenden Lichtstrahlen entgegengesetzt und demnach dem Sinne von e^0, e, e_1 und $e_1{}^0$ conform zu nehmen;

F die Brennweite der Doppellinse.

Wir bestimmen die drei letzteren Grössen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{D}{f f_1} \\ E &= -\frac{DF}{f_1} \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{DF}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

und erhalten danach auch leicht die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{E}{f} &= \frac{E_1}{f_1} = \frac{DF}{ff_1} \\ -E + E_1 + \frac{EE_1}{F} &= D \\ 1 - \frac{E}{f} = 1 + \frac{E_1}{f_1} &= F\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . . \quad (34)$$

Setzen wir ferner voraus, dass der zuerst einfallende Strahl die Achse in der Entfernung K vom ersten, der durch die Doppellinse gebrochene Strahl dieselbe in der Entfernung K_1 vom zweiten Hauptpunkte der Doppellinse durchschneide, diese Entfernungen in demselben Sinne, wie früher k^0, k, k_1 und $k_1{}^0$ genommen, so erhalten wir unmittelbar die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} k^0 &= K + E \\ k_1 - k &= D \\ k_1{}^0 &= K_1 + E_1 \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad . . . . . \quad (35)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k^0}\left(1 + \frac{E}{K}\right) &= \frac{1}{K} \\ \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} &= \frac{D}{kk_1} \\ \frac{1}{k^0{}_1}\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right) &= \frac{1}{K_1} \end{aligned}\right\} \quad . . . . . \quad (36)$$

Die Brechung durch die erste Linse ergiebt nach Gleichung (21)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{f} - s \cdot h^2$$

und ist hierin der Werth h durch Gleichung (20), der Werth s durch die Gleichungen (24) oder (25) und die Gleichung (22) zu bestimmen.

Auf die zweite Linse angewendet, ergiebt Gleichung (21)

$$\frac{1}{k_1{}^0} = \frac{1}{k_1} - \frac{1}{f_1} - s_1 \cdot h_1{}^2$$

und es können durch Anwendung der eben erwähnten Gleichungen auch hier die Werthe h_1 und s_1 auf die Elemente der Hinterlinse zurückgeführt werden.

Die Addition der beiden vorstehenden Gleichungen liefert uns

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} = \frac{D}{kk_1} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k_1{}^0} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} - s h^2 - s_1 h_1{}^2$$

und wenn wir zur Einführung in die linke Seite die Werthe von $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k_1}$ aus den vorhergehenden Gleichungen entnehmen,

$$\left(\frac{1}{k^0} - \frac{1}{f} - s h^2\right)\left(\frac{1}{k_1{}^0} + \frac{1}{f_1} + s_1 h_1{}^2\right) D$$
$$= \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k_1{}^0} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} - s h^2 - s_1 h_1{}^2.$$

Die weitere Entwickelung dieser Gleichung ergiebt unter Vernachlässigung des in $h^2 h_1{}^2$ multiplicirten Gliedes

$$\frac{D}{k^0 k_1{}^0} + \frac{1}{k^0}\frac{D}{f_1} - \frac{1}{k_1{}^0}\frac{D}{f} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k_1{}^0} - \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} + \frac{D}{f f_1}$$
$$-\left(1 - \frac{D}{k_1{}^0} - \frac{D}{f_1}\right) s h^2 - \left(1 + \frac{D}{k^0} - \frac{D}{f}\right) s_1 h_1{}^2$$

und nach Berücksichtigung der Gleichung (33)

$$\frac{D}{k^0 k_1{}^0} - \frac{1}{k^0}\cdot\frac{E}{F} - \frac{1}{k_1{}^0}\frac{E_1}{F} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k_1{}^0} - \frac{1}{F}$$
$$-\left(1 - \frac{D}{k_1{}^0} + \frac{E}{F}\right) s h^2 - \left(1 + \frac{D}{k^0} - \frac{E_1}{F}\right) s_1 h_1{}^2.$$

Multipliciren wir die vorstehende Gleichung mit $\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)$ und benutzen zur Vereinfachung die Gleichungen (36), so erhalten wir

$$\frac{D}{K K_1} - \frac{1}{K}\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\frac{E}{F} - \frac{1}{K_1}\left(1 + \frac{E}{K}\right)\frac{E_1}{F}$$
$$= \frac{1}{K}\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right) - \frac{1}{K_1}\left(1 + \frac{E}{K}\right) - \frac{1}{F}\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)$$
$$-\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1} - \frac{D}{K_1} + \frac{E}{F} + \frac{E E_1}{F K_1}\right) s h^2$$
$$-\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left(1 + \frac{E}{K} + \frac{D}{K} - \frac{E_1}{F} - \frac{E E_1}{F K}\right) s_1 h_1{}^2$$

oder vereinfacht

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} + \frac{1}{K K_1}\left[-E + E_1 + \frac{E E_1}{F} - D\right]$$
$$-\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left[1 + \frac{E}{F} + \frac{1}{K_1}\left(E_1 + \frac{E E_1}{F} - D\right)\right] s h^2$$
$$-\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left[1 - \frac{E_1}{F} + \frac{1}{K}\left(E - \frac{E E_1}{F} + D\right)\right] s_1 h_1{}^2$$

und, auf die zweite der Gleichungen (34) gestützt,

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} - \left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{E}{F} + \frac{E}{K_1}\right) s h^2 - \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left(1 - \frac{E_1}{F} + \frac{E_1}{K}\right) s_1 h_1^2.$$

Da endlich die Beziehung zwischen den Gliedern der ersten Dimension zur Vereinfachung derer von zweiter Dimension verwendet werden darf, so ergiebt sich

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} - \left(1 + \frac{E}{K}\right)^2 s h^2 - \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^2 s_1 h_1^2 \quad . \quad (37)$$

und für Strahlen, welche mit der Achse zusammenfallen,

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Es ist bemerkenswerth, dass, nachdem auch für die Doppellinse Hauptpunkte und Brennweite eingeführt sind, eine Gleichung von derselben Form, wie früher für die Brechung durch eine Linse sich herausgestellt hat.

Um die Brennweiten der Einzellinsen auf die Hauptpunkte der Doppellinse zu beziehen, setzen wir

$$\frac{1}{f} = \left(1 + \frac{E}{K}\right)\frac{1}{\mathfrak{f}} \text{ und } \frac{1}{f_1} = \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{\mathfrak{f}_1} \quad . \quad . \quad (39)$$

und sind sonach, auf erste Dimension beschränkt, zu der Gleichung

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{\mathfrak{f}} + \frac{1}{\mathfrak{f}_1} - \frac{DF}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1}\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_1}\right)$$

oder

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

berechtigt. Wir bemerken ferner, dass, auf erste Dimension beschränkt,

$$\left(1 + \frac{E}{K}\right)\frac{1}{k} = \left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(\frac{1}{k^0} - \frac{1}{\mathfrak{f}}\right) = \frac{1}{K} - \frac{1}{f},$$

$$\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{k_1} = \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left(\frac{1}{k_1^0} + \frac{1}{\mathfrak{f}_1}\right) = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{f_1},$$

und demnach

$$\left(1 + \frac{E}{K}\right)\frac{1}{k} - \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{k_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K_1} - \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}\right) = \frac{1}{F} - \frac{1}{F} = 0$$

ist, und dürfen daher

$$\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{k}=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{k_1}=\frac{1}{L},$$

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{K}-\frac{1}{f},\quad \frac{1}{K_1}=\frac{1}{L}-\frac{1}{f_1} \qquad \ldots \quad (41)$$

setzen. Um auch die Radien der Linsen auf die Hauptpunkte der Doppellinse zu beziehen, bestimmen wir die neu einzuführenden Werthe R^0, R, R_1, $R_1{}^0$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{R^0}&=\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{r^0}=\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\frac{1}{r^0}\\
&=\left(1+\frac{E+e^0}{K}\right)\frac{1}{r^0},\\
\frac{1}{R}&=\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{r}=\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{e}{k}\right)\frac{1}{r}\\
&=\left(1+\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right)\frac{1}{r},\\
\frac{1}{R_1}&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{r_1}=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left(1+\frac{e_1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1}\\
&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right)\frac{1}{r_1},\\
\frac{1}{R_1{}^0}&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{r_1{}^0}=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left(1+\frac{e_1{}^0}{k_1{}^0}\right)\frac{1}{r_1{}^0}\\
&=\left(1+\frac{E_1+e_1{}^0}{K_1}\right)\frac{1}{r_1{}^0},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

und erhalten unmittelbar die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n-1}{R}-\frac{n-1}{R^0}&=\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{f}=\frac{1}{f},\\
\frac{n_1-1}{R_1{}^0}-\frac{n_1-1}{R}&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f_1},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (43)$$

und

$$\frac{n_1-1}{R_1{}^0}-\frac{n_1-1}{R_1}+\frac{n-1}{R}-\frac{n-1}{R^0}=\frac{1}{F}.$$

Der zwischen beiden Linsen verlaufende Strahl schneidet das im zweiten Hauptpunkte der Vorderlinse auf der Achse errichtete Loth in der Entfernung h, das im ersten Hauptpunkte der Hinterlinse errichtete Loth aber in der Entfernung h_1 von der Achse und dieser Strahl bedingt somit den Zusammenhang zwischen h

und h_1. Soll die Entwickelung des Werthes $\frac{h_1}{h}$ nur behuf der Substitution in die Glieder der sphärischen Abweichung erfolgen, so dürfen wir uns auf Glieder der ersten Dimension beschränken und erhalten leicht

$$\frac{h_1}{h} = \frac{k_1}{k}$$

und, wenn das letztere Verhältniss aus der ersten der Gleichungen (41) entnommen wird,

$$\frac{h_1}{h} = \frac{1 + \frac{E_1}{K_1}}{1 + \frac{E}{K}},$$

so dass offenbar

$$\frac{h}{1 + \frac{E}{K}} = \frac{h_1}{1 + \frac{E_1}{K_1}} = H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

gesetzt werden darf. Der einfallende Strahl schneidet das im ersten Hauptpunkte der Vorderlinse errichtete Loth in der Entfernung h, der durch die Doppellinse gebrochene Strahl das im zweiten Hauptpunkte der Hinterlinse errichtete Loth in der Entfernung h_1 von der Achse. Da nun unter Berücksichtigung dieses Umstandes leicht ersichtlich ist, dass der erstere Bruch die Achsenentfernung desjenigen Punktes, in welchem das im ersten Hauptpunkte der Doppellinse errichtete Loth vom einfallenden Strahle, der letztere Bruch aber die Achsenentfernung desjenigen Punktes darstellt, in welchem das im zweiten Hauptpunkte der Doppellinse auf der Achse errichtete Loth von dem durch die Doppellinse gebrochenen Strahle getroffen wird, so ist nachgewiesen, dass auch die in beiden Hauptpunkten der Doppellinse auf der Achse errichteten Lothe vom einfallenden, resp. dem die Doppellinse verlassenden Strahle in der gleichen Höhe H durchschnitten werden.

Ersetzen wir in Gleichung (37) die Werthe h und h_1 durch den auf die Hauptpunkte der Doppellinse bezogenen Werth H, so gewinnt jene Gleichung die Form

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} - \left(1 + \frac{E}{K}\right)^4 s\, H^3 - \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1\, H^3$$

oder auch

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} - SH^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

wenn unter S der Werth

$$S = \left(1 + \frac{E}{K}\right)^4 s + \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1 \quad \ldots \quad (46)$$

verstanden wird. Da nun, wie früher entwickelt,

$$s = \left(1 + \frac{e^0}{k^0}\right) {}^*s^0 - \left(1 + \frac{e}{k}\right) s$$

und, wenn diese Beziehung auch auf die zweite Linse übertragen wird,

$$s_1 = \left(1 + \frac{e_1}{k_1}\right) {}^*s_1 - \left(1 + \frac{e_1{}^0}{k_1{}^0}\right) {}^*s_1{}^0,$$

so ergiebt sich auch unter Anwendung der Gleichungen (36) und (41)

$$S = \left(1 + \frac{E}{K} + \frac{e^0}{K}\right)\left(1 + \frac{E}{K}\right)^3 {}^*s^0 - \left(1 + \frac{E}{K} + \frac{e}{L}\right)\left(1 + \frac{E}{K}\right)^3 {}^*s$$
$$+ \left(1 + \frac{E_1}{K_1} + \frac{e_1}{L}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K^1}\right)^3 {}^*s_1 - \left(1 + \frac{E_1}{K_1} + \frac{e_1{}^0}{K_1}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^3 {}^*s_1{}^0.$$

Wir haben in den der Gleichung (24) vorhergehenden Gleichungen den Werth $^*s^0 - s$ in doppelter Weise dargestellt; legen wir diese Ausdrücke zu Grunde und übertragen wir dieselben auch auf die zweite Linse behuf Entwickelung des Werthes $^*s_1 - {}^*s_1{}^0$, so erhalten wir leicht

$$\left.\begin{aligned}
\left(1+\frac{E}{K}\right)^3({}^*s^0-{}^*s)&=\frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{R^{02}}+\frac{2n+1}{R^0}\frac{n}{(n-1)f}+\frac{n^3}{(n-1)^2f^2}-\frac{4n+4}{R^0K}-\frac{n}{(n-1)f}\frac{3n+1}{K}+\frac{3n+2}{K^2}\right]\\
\left(1+\frac{E}{K}\right)^3({}^*s^0-{}^*s)&=\frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{R^2}-\frac{2n+1}{R}\frac{n}{(n-1)f}+\frac{n^3}{(n-1)^2f^2}-\frac{4n+4}{RL}+\frac{n}{(n-1)f}\frac{3n+1}{L}+\frac{3n+2}{L^2}\right]\\
\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3({}^*s_1-{}^*s_1{}^0)&=\frac{1}{2n_1f_1}\left[\frac{n_1+2}{R_1{}^2}+\frac{2n_1+1}{R_1}\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}+\frac{n_1{}^3}{(n_1-1)^2f_1{}^2}-\frac{4n_1+4}{R_1L}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\frac{3n_1+1}{L}+\frac{3n_1+2}{L^2}\right]\\
\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3({}^*s_1-{}^*s_1{}^0)&=\frac{1}{2n_1f_1}\left[\frac{n_1+2}{R_1{}^{02}}-\frac{2n_1+1}{R_1{}^0}\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}+\frac{n_1{}^3}{(n_1-1)^2f_1{}^2}-\frac{4n_1+4}{R_1K_1}+\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\frac{3n_1+1}{K_1}+\frac{3n_1+2}{K_1{}^2}\right]
\end{aligned}\right\}(47)$$

und wenn wir ausserdem zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
{}^*S^0&=\left(1+\frac{E}{K}\right)^3{}^*s^0=\left(1+\frac{E}{K}\right)^3\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)^2=\frac{1}{F^3}\cdot\frac{n-1}{2n^2}\left((n+1)\frac{F}{K}-\frac{F}{R^0}\right)\left(\frac{F}{R^0}-\frac{F}{K}\right)^2\\
{}^*S&=\left(1+\frac{E}{K}\right)^3{}^*s=\left(1+\frac{E}{K}\right)^3\frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)^2=\frac{1}{F^3}\frac{n-1}{2n^2}\left((n+1)\frac{F}{L}-\frac{F}{R}\right)\left(\frac{F}{R}-\frac{F}{L}\right)^2\\
{}^*S_1&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3{}^*s_1=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3\frac{n_1-1}{2n_1{}^2}\left(\frac{n_1+1}{k_1}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{k_1}\right)^2=\frac{1}{F^3}\frac{n_1-1}{2n_1{}^2}\left((n_1+1)\frac{F}{L}-\frac{F}{R_1}\right)\left(\frac{F}{R_1}-\frac{F}{L}\right)^2\\
{}^*S_1{}^0&=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3{}^*s_1{}^0=\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3\frac{n_1-1}{2n_1{}^2}\left(\frac{n_1+1}{k_1{}^0}-\frac{1}{r_1{}^0}\right)\left(\frac{1}{r_1{}^0}-\frac{1}{k_1{}^0}\right)^2=\frac{1}{F^3}\frac{n_1-1}{2n_1{}^2}\left((n_1+1)\frac{F}{K_1}-\frac{F}{R_1{}^0}\right)\left(\frac{F}{R_1{}^0}-\frac{F}{K_1}\right)^2
\end{aligned}\right\}(48)$$

setzen, so enthalten die vorstehenden Gleichungen die vollständige Bestimmung von S. Es können zum Ausdrucke der an Grösse hervorragendsten Glieder sowohl die der Vorder- als die der Hinterlinse zugehörigen Werthe nach Massgabe der Gleichung (47) verwendet werden; von den vier in dieser Beziehung möglichen

Combinationen sei nur diejenige hier ausgeführt, in welcher die den inneren Linsenflächen zugehörigen Werthe zur Verwendung kommen. Wir erhalten dafür

$$\left.\begin{aligned} F^3 S = {}& {}^1/_2 \left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{F}{f}\left[\frac{n+2}{n}\left(\frac{F}{R}\right)^2 - \frac{2n+1}{n-1}\frac{F}{R}\frac{F}{f} + \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{F}{f}\right)^2 - \frac{4n+4}{n}\frac{F}{R}\frac{F}{L} + \frac{3n+1}{n-1}\frac{F}{f}\frac{F}{L} + \frac{3n+2}{n}\left(\frac{F}{L}\right)\right] \\ & + {}^1/_2 \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{F}{f_1}\left[\frac{n_1+2}{n_1}\left(\frac{F}{R_1}\right)^2 + \frac{2n_1+1}{n_1-1}\frac{F}{R_1}\frac{F}{f_1} + \frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}\left(\frac{F}{f_1}\right)^2 - \frac{4n_1+4}{n_1}\frac{F}{R_1}\frac{F}{L} - \frac{3n_1+1}{n_1-1}\frac{F}{f_1}\frac{F}{L} + \frac{3n_1+2}{n_1}\left(\frac{F}{L}\right)^2\right] \\ & + \frac{e^0}{K} F^3 {}^*S^0 - \frac{e}{L} F^3 {}^*S + \frac{e_1}{L} F^3 {}^*S_1 - \frac{e_1{}^0}{K_1} F^3 {}^*S_1{}^0 \end{aligned}\right\} 49$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} F^3 S = {}& {}^1/_2 \frac{F}{f}\left[\frac{n+2}{n}\left(\frac{F}{R}\right)^2 - \frac{2n+1}{n-1}\frac{F}{R}\frac{F}{f} + \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\frac{F}{f}\right)^2 - \frac{4n+4}{n}\frac{F}{R}\frac{F}{L} + \frac{3n+1}{n-1}\frac{F}{f}\frac{F}{L} + \frac{3n+2}{n}\left(\frac{F}{L}\right)^2\right] \\ & + {}^1/_2 \frac{F}{f_1}\left[\frac{n_1+2}{n_1}\left(\frac{F}{R_1}\right)^2 + \frac{2n_1+1}{n_1-1}\frac{F}{R_1}\frac{F}{f_1} + \frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}\left(\frac{F}{f_1}\right)^2 - \frac{4n_1+4}{n_1}\frac{F}{R_1}\frac{F}{L} - \frac{3n_1+1}{n_1-1}\frac{F}{f_1}\frac{F}{L} + \frac{3n_1+2}{n_1}\left(\frac{F}{L}\right)^2\right] \\ & + \left(\frac{E}{K}+\frac{e^0}{K}\right) F^3 {}^*S^0 - \left(\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right) F^3 {}^*S + \left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right) F^3 {}^*S_1 - \left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1{}^0}{K_1}\right) F^3 {}^*S_1{}^0 \end{aligned}\right\} (50)$$

Die durch Gleichung (48) bestimmten Werthe $^*S^0$, $^*S$, $^*S_1$ und $^*S_1{}^0$ sind nur correctionsweise zu verwenden und es ist klar, dass, wenn die Linsen sich nur in geringer Entfernung von einander befinden, die Gleichung (50), im anderen Falle aber die Gleichung (49) am vortheilhaftesten in Anwendung gebracht wird.

Durch Gleichung (45) u. ff. und durch die Bemerkung, dass der einfallende und der gebrochene Strahl die in den resp. Hauptpunkten auf der Achse errichteten Lothe in gleicher Höhe durchschneiden, ist unsere Aufgabe,

die Lage des Strahles nach der Brechung anzugeben, gelöst. Nur wenn $K = 0$, der einfallende Strahl also den ersten Hauptpunkt trifft, verlieren die vorstehenden Bestimmungen ihre Anwendbarkeit, und dieser Fall ist daher besonders zu erörtern.

Nehmen wir vorläufig K sehr klein an, so gilt dasselbe von K_1 und die der Gleichung (37) vorhergehende Gleichung erhält die Form

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{E^2}{KK_1} s h^2 - \frac{E_1^2}{KK_1} s_1 h_1^2$$

oder auch

$$K_1 = K + E^2 s h^2 + E_1^2 s_1 h_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Da wir für eine Linse die Gleichheit der in den Hauptpunkten errichteten und bis zum Durchschnitt mit den Strahlenrichtungen verlängerten Lothe nur unter Vernachlässigung der sphärischen Abweichung bewiesen haben, so wird die vorläufige Beschränkung auf Glieder der ersten Dimension auch für diese Untersuchung geboten sein. Schliesst nun der zuerst einfallende Strahl den Winkel O, der zwischen beiden Linsen verlaufende Strahl den Winkel o und der die Doppellinse verlassende Strahl den Winkel O_1 mit der Achse ein, so ergeben sich leicht die Beziehungen:

$$\text{tg } O = \frac{h}{k^0}, \quad tg\ o = \frac{h}{k} = \frac{h_1}{k_1} \quad \text{und } tg\ O_1 = \frac{h_1}{k_1{}^0}.$$

Es ist daher

$$\frac{tg\ o}{tg\ O} = \frac{k^0}{k}, \quad \frac{tg\ O_1}{tg\ o} = \frac{k_1}{k_1{}^0}$$

oder

$$\frac{tg\ O_1}{tg\ O} = \frac{k^0 \cdot k_1}{k \cdot k_1{}^0}$$

und, unter Vernachlässigung der sphärischen Abweichung,

$$\frac{tg\ O_1}{tg\ O} = \frac{1 - \frac{k^0}{f}}{1 + \frac{k_1{}^0}{f_1}} = \frac{1 - \frac{K}{f} - \frac{E}{f}}{1 + \frac{K_1}{f_1} + \frac{E_1}{f_1}}.$$

Berücksichtigen wir nun die Gleichung (34), so wird

$$\frac{\text{tg } O_1}{\text{tg } O} = \frac{F\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}\right) - \frac{K}{f}}{F\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}\right) + \frac{K_1}{f_1}} = \frac{1 - \frac{f_1 K}{F(f + f_1)}}{1 + \frac{f K_1}{F(f + f_1)}}$$

und da der Gleichung (51) zufolge $K_1 = K$ zu setzen ist,

$$\frac{\operatorname{tg} O_1}{\operatorname{tg} O} = 1 - \frac{K}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Für $K = 0$ ergiebt sich $\operatorname{tg} O_1 = \operatorname{tg} O$; es wird daher unter Vernachlässigung der sphärischen Abweichung, also für Strahlen, welche der Achse nahe liegen, wenn der einfallende Strahl den ersten Hauptpunkt trifft, der gebrochene Strahl in unveränderter und durch den zweiten Hauptpunkt gehender Richtung die Doppellinse verlassen.

4. Brechung durch ein System von Linsen,

unter Berücksichtigung der Entfernungen und Dicken der Linsen, sowie der sphärischen Abweichung erster Ordnung.

Da unsere Betrachtungen für die Brechung durch eine Doppellinse Resultate von genau derselben Form ergeben haben, wie für die Brechung durch eine Linse, so ist klar, dass, wenn wir jetzt eine Doppel- und eine einfache Linse, oder zwei Doppellinsen, oder auch zwei ganz beliebige Systeme von Linsen combiniren, die Lage des gebrochenen Strahles vollständig den bisherigen Sätzen gemäss zu bestimmen ist.

Als Beispiel wollen wir die Gleichungen, wie sie sich für die Brechung durch ein System von zwei Doppellinsen ergeben, noch hier anführen. Für die erste Doppellinse behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Artikels bei, für die zweite sollen zur Bezeichnung die entsprechenden Buchstaben des griechischen Alphabets und für die auf das Gesammtsystem bezogenen Grössen deutsche Buchstaben gewählt werden.

Die Brechung durch die erste Doppellinse ergiebt

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F} - S H^2$$

und nach Gleichung (46) wird S auf die den Einzellinsen zugehörigen Werthe s und s_1 zurückzuführen sein durch die Formel

$$S = \left(1 + \frac{E}{K}\right)^4 s + \left(1 + \frac{E_1}{K}\right)^4 s_1.$$

Ebenso erhalten wir für die Brechung durch die zweite Doppellinse

$$\frac{1}{\mathrm{K}_1} = \frac{1}{\mathrm{K}} - \frac{1}{\Phi} - \Sigma H^2,$$

in welcher Gleichung durch die Beziehung

$$\Sigma = \left(1 + \frac{E}{K}\right)^4 \sigma + \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^4 \sigma_1$$

die Zurückführung auf die Einzellinsen sich ergiebt.

Combiniren wir nun die Doppellinsen, wie früher die Einzellinsen, so erhalten wir selbstverständlich wieder Gleichungen von derselben Form, nämlich

$$\frac{1}{\mathfrak{K}_1} = \frac{1}{\mathfrak{K}} - \frac{1}{\mathfrak{F}} - \mathfrak{S}\mathfrak{H}^2 \text{ und}$$

$$\mathfrak{S} = \left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^4 S + \left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^4 \Sigma.$$

Uebrigens darf der hier einzuführende Werth von S und ebenso der von Σ auch den Gleichungen (47), (48), (49) und (50) gemäss bestimmt werden.

Was die Bestimmung der Brennweiten und Hauptpunkte betrifft, so dürfen wir die für die erste Doppellinse geltenden Bestimmungen

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{D}{ff_1}, \quad E = -\frac{DF}{f_1}, \quad E_1 = \frac{DF}{f}$$

auch auf die zweite Doppellinse und das System übertragen und erhalten

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi_1} - \frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}, \quad E = -\frac{\Delta\Phi}{\varphi_1}, \quad E_1 = \frac{\Delta\Phi}{\varphi}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Phi} - \frac{\mathfrak{D}}{F\Phi}, \quad \mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{\Phi}, \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F}.$$

Es werden auch die in den Hauptpunkten des Systems auf der Achse errichteten Lothe von dem einfallenden und dem gebrochenen Strahle in gleicher Höhe $\mathfrak{H}$ durchschnitten und in gleicher Weise gilt auch hier der Satz, dass ein gegen die Achse wenig geneigter Strahl, welcher den ersten Hauptpunkt des ganzen Systems trifft, nach der Brechung durch den zweiten Hauptpunkt geht, und das System in unveränderter Richtung verlässt. Ein solcher Strahl soll in Zukunft ein Hauptstrahl des Systems heissen.

ZWEITER THEIL.

1. Abbildung eines leuchtenden Punktes.

Nachdem wir durch die bisherigen Untersuchungen die Mittel gewonnen, den Weg eines Lichtstrahles durch ein beliebiges System von Linsen zu verfolgen, müssen wir uns nunmehr der Beantwortung der Frage zuwenden, ob und wo die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen, welche wir vorläufig als homogen vorauszusetzen haben, nach der Brechung wieder zur Vereinigung gelangen und somit ein Bild jenes leuchtenden Punktes ergeben werden.

a) Der leuchtende Punkt liege in der Achse des Systems.

Nennen wir $\mathfrak{F}$ die Brennweite, $\mathfrak{K}$ die Entfernung des leuchtenden Punktes vom ersten Hauptpunkte des Systems und setzen voraus, dass ein einfallender Strahl das im ersten Hauptpunkte auf der Achse errichtete Loth in der Höhe $\mathfrak{H}$ durchschneide, so wird, wenn $\mathfrak{S}$ in der früher erörterten Weise bestimmt ist, der gebrochene Strahl die Achse in der Entfernung $\mathfrak{K}_1$ vom zweiten Hauptpunkte durchschneiden, wenn

$$\frac{1}{\mathfrak{K}_1} = \frac{1}{\mathfrak{K}} - \frac{1}{\mathfrak{F}} - \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{H}^2$$

oder

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}-\mathfrak{K}} + \left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}-\mathfrak{K}}\right)^2 \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{H}^2$$

ist. Setzen wir $\mathfrak{H} = 0$, also einen Achsenstrahl voraus und $\mathfrak{K}_1^0$ als dessen Schnittentfernung, so wird

$$\mathfrak{K}_1{}^0 = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}-\mathfrak{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

und als Entfernung beider Schnittpunkte ergiebt sich

$$\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1{}^0 = \left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}-\mathfrak{K}}\right)^2 \mathfrak{S}\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{K}_1{}^{02}\mathfrak{S}\mathfrak{H}^2 \quad \ldots \quad (54)$$

Diese Gleichungen rechtfertigen folgende Bemerkungen.

Zwei Strahlen, symmetrisch zur Achse einfallend, schneiden nach der Brechung die Achse in demselben Punkte. Dagegen werden Strahlen, die in verschiedener Entfernung von der Achse einfallen, dieselbe nach der Brechung, allgemein zu reden, in verschiedenen Punkten durchschneiden und demnach überhaupt keinen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt als Bild des leuchtenden Punktes ergeben, da ein solcher, allen gebrochenen Strahlen gemeinsamer Punkt der Symmetrie halber doch auf der Achse liegen müsste.

Das im Allgemeinen nur unvollkommen zu Stande kommende Bild des leuchtenden Punktes ist, nach dem Sprachgebrauche, mit Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linsenflächen, oder mit sphärischer Abweichung behaftet. Beziehen wir $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}_1$ auf den äussersten, am Rande des Systems hindurchgehenden Strahl, so ist das Mass der sphärischen Abweichung längs der Achse der vorstehend entwickelte Werth $\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1{}^0$ und dieselbe ist sonach einfach proportional dem Werthe $\mathfrak{S}$, quadratisch proportional den Werthen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{H}$. Mit der Fläche, welche das System den Strahlen zum Durchgange darbietet, nimmt daher auch die sphärische Abweichung zu, und ist in der That in erster Ordnung nur aufzuheben durch Erfüllung der Bedingung $\mathfrak{S} = 0$. Da aber $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ abhängig ist, so wird das System nicht absolut, sondern immer nur für einen leuchtenden Punkt in bestimmter Entfernung abweichungsfrei hergestellt werden können.

Wir setzen nun einen in der Höhe $\mathfrak{H}$ einfallenden und den benachbarten Strahl voraus, und nennen y und x die Coordinaten desjenigen Punktes, in welchem die zugehörigen gebrochenen Strahlen einander durchschneiden. Als Abscissenachse diene die Achse des Linsensystems, die Ordinatenachse sei senkrecht dazu, der Anfangspunkt der Coordinaten sei der zweite Hauptpunkt. Da der gebrochene Strahl das im zweiten Hauptpunkte errichtete Loth ebenfalls in der Höhe $\mathfrak{H}$ trifft, so wird

$$\frac{y}{\mathfrak{K}_1 - x} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}_1}$$

oder

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathfrak{H}}{x} - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}_1}$$

und nach Einsetzung des Werthes für $\mathfrak{K}_1$

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathfrak{H}}{x} - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}} + \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{F}} + \mathfrak{S}\mathfrak{H}^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Da der durch y und x bestimmte Punkt ebenfalls dem benachbarten Strahle angehören soll, so wird auch die durch Differentiation nach $\mathfrak{H}$ erhaltene Gleichung

$$0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{K}} + \frac{1}{\mathfrak{F}} + 3\,\mathfrak{S}\mathfrak{H}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Gültigkeit haben. Die Vereinigung beider ergiebt

$$\frac{y}{x} = -\,2\,\mathfrak{S}\mathfrak{H}^3$$

und es sind x und y durch die beiden letzten Gleichungen bestimmt. Werden dieselben zur Elimination von $\mathfrak{H}$ benutzt, so erhalten wir als Gleichung der die sämmtlichen im Achsenschnitt gebrochenen Strahlen einhüllenden Linie

$$\frac{\mathfrak{S}}{4} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{\mathfrak{K}} - \frac{1}{\mathfrak{F}} - \frac{1}{x}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Für $\frac{1}{x} = \frac{1}{\mathfrak{K}} - \frac{1}{\mathfrak{F}}$, also im Vereinigungspunkte der Achsenstrahlen wird $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \infty$; es tritt an dieser Stelle, dem Ausgangspunkte zweier zur Achse symmetrischen Zweige, eine Spitze auf. Die weitere Discussion der die gebrochenen Strahlen einhüllenden Linie, welche den Namen Diacaustica verdient, liegt unserm Zwecke fern.

Wird das Bild des leuchtenden Punktes auf einer zur Achse senkrechten Ebene aufgefangen und setzen wir eine zur Achse concentrische Begrenzung des Linsensystems voraus, so werden die Durchschnittspunkte der gebrochenen Strahlen mit der auffangenden Ebene innerhalb eines zur Achse concentrischen Kreises, des sogenannten Abweichungskreises, liegen, welcher erleuchtet erscheint, und, je nach der Aufstellung der Ebene grösser oder kleiner ausfallen wird. Um zur Bestimmung seines Halbmessers zu gelangen, setzen wir voraus, dass in Fig. 3 (a. f. S.)

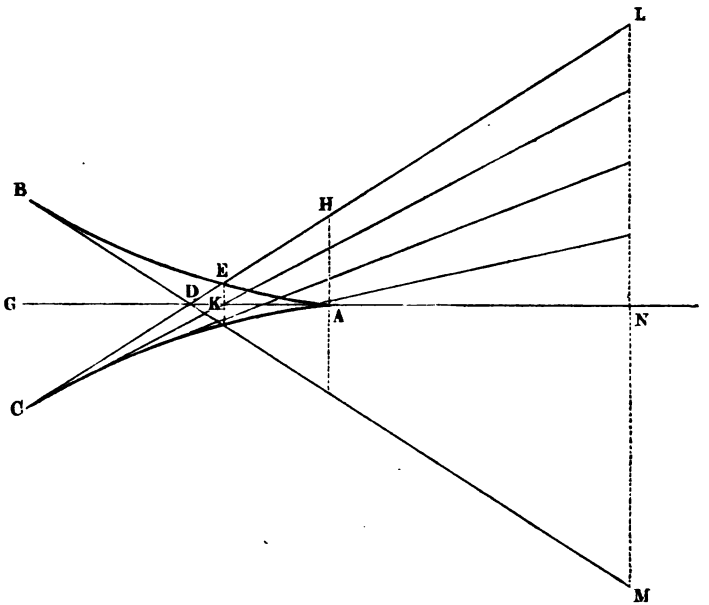
$G\,N$ die Achse des Systems,

N dessen zweiter Hauptpunkt sei, in welchem

$M\,N\,L$ als Loth auf der Achse errichtet ist.

L und M seien die äussersten Punkte, in welchen dieses Loth von den gebrochenen Strahlen getroffen wird,

Fig. 3.



D der Convergenzpunkt der äussersten Strahlen LD und MD,
A der Convergenzpunkt der Achsenstrahlen, von welchem AB und AC, die Zweige der Diacaustica, ausgehen.

Nach den bisherigen Bezeichnungen ist dann
$LN = MN = \mathfrak{H}$, $AN = \mathfrak{K}_1{}^0$ $DN = \mathfrak{K}_1$ und
$DA = \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_1{}^0 = \mathfrak{K}_1{}^{02} \mathfrak{S} \mathfrak{H}^2$ die sphärische Abweichung längs der Achse.

Bedenken wir nun, dass die sämmtlichen, das Loth MNL zwischen N und L durchschneidenden gebrochenen Strahlen zwischen GD und DL einerseits und zwischen CA und AN andererseits verlaufen, und dass ebenso die sämmtlichen, das Loth MNL zwischen N und M durchschneidenden gebrochenen Strahlen zwischen GD und DM einerseits und zwischen BA und AN andererseits enthalten sind, so ist unmittelbar klar,

dass das in A auf der Achse errichtete und bis zum Durchschnitte mit dem äussersten Strahle DL verlängerte Loth AH den Halbmesser des im Punkte A auftretenden Abweichungskreises, und

dass das vom Durchschnitte E der Diacaustica AB und des äussersten Strahles DL auf die Achse gefällte Loth EK den Halbmesser des möglichst kleinsten Abweichungskreises darstellt.

Die Gleichung (55) darf als Gleichung des gebrochenen Strahles LD, bezogen auf das dort eingeführte Coordinatensystem, angesehen werden. Setzen wir $x = NA = \mathfrak{R}_1{}^0$, so wird $y = AH$ und wir erhalten für die letztere Grösse

$$AH = y = \mathfrak{R}_1{}^0 \mathfrak{H} \left[\frac{1}{\mathfrak{R}_1{}^0} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}} + \mathfrak{S}\mathfrak{H}^2\right]$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (54)

$$AH = \mathfrak{R}_1{}^0 \mathfrak{S}\mathfrak{H}^3 = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}_1{}^0} AD \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Ist die sphärische Abweichung vollständig aufgehoben, also $\mathfrak{S} = 0$, so wird auch $AH = 0$ und der Abweichungskreis reducirt sich auf einen Punkt, den Bildpunkt. In jedem anderen Falle aber wird, da die der Achse nahe liegenden Strahlen sich fast vollständig in A vereinigen, ein von einem Nebelkreise umschlossener Lichtpunkt als Bild erscheinen.

Um den Durchschnittspunkt E und damit EK, den Halbmesser des kleinsten Abweichungskreises, zu bestimmen, combiniren wir die Gleichung des Strahles DL

$$\frac{y}{x} = \mathfrak{H}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{F}} + \mathfrak{S}\mathfrak{H}^2\right)$$

mit der Gleichung der Diacaustica

$$\mathfrak{S}\frac{y^2}{x^2} + \frac{4}{27}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}}\right) = 0$$

und erhalten für die Abscisse x des Durchschnittspunktes

$$\mathfrak{S}\mathfrak{H}^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}} + \mathfrak{S}\mathfrak{H}^2\right)^2 + \frac{4}{27}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}}\right)^3 = 0 \quad (59)$$

Beide Linien werden, da die vorstehende Gleichung vom dritten Grade ist, drei Durchschnittspunkte haben. In der That fallen zwei derselben zusammen im Berührungspunkte C, dessen Abscisse durch die Gleichung (56) bestimmt ist. Es wird danach die Gleichung (59) den Factor $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}} + 3\mathfrak{S}\mathfrak{H}^2\right)^2$ besitzen müssen und die Gleich-Null-Setzung des dann noch übrigen Factors, also die Gleichung

$$\frac{4}{27}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{F}}\right) + \frac{1}{9}\mathfrak{S}\mathfrak{H}^2 = 0.$$

liefert in x die Abscisse KN des hier in Frage kommenden Durchschnittspunktes E und zwar

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{F}} - \frac{3}{4}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}^2,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1{}^0} - \frac{3}{4}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}^2$$

und, bis auf Glieder zweiter Dimension genau

$$KN = x = \mathfrak{R}_1{}^0 + \frac{3}{4}\,\mathfrak{R}_1{}^{0\,2}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}^2 \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Es wird auch

$$AK = KN - \mathfrak{R}_1{}^0 = \frac{3}{4}\,\mathfrak{R}_1{}^{0\,2}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}^2 = \frac{3}{4}\,AD'$$

und

$$EK = \frac{1}{4}\,AH = \frac{1}{4}\,\mathfrak{R}_1{}^0\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}^3.$$

Der hiermit in Bezug auf Ort und Grösse bestimmte kleinste Abweichungskreis enthält nur $\frac{1}{16}$ der Fläche des durch A gehenden, doch wird die Lichtvertheilung eine gleichmässigere und daher die Lichtconcentration eine geringere sein.

b) Der leuchtende Punkt liege nicht in der Achse des Systems.

α) Abbildung durch einen die Achse schneidenden Strahl.

Wir setzen eine einzige brechende Kugelfläche mit C (Fig. 4) als Mittelpunkt voraus, von welcher AB den auch den leuchtenden Punkt G enthaltenden Achsenschnitt darstellt. Der von G ausgehende Strahl GB und der unmittelbar benachbarte sollen nach der Brechung in H zusammentreffen. Von G, H und dem Einfallspunkte B seien die Lothe GD, HE und BL auf die Achse DA gefällt, und die letztere werde von dem einfallenden, resp. dem gebrochenen Strahle in den Punkten J und K durchschnitten.

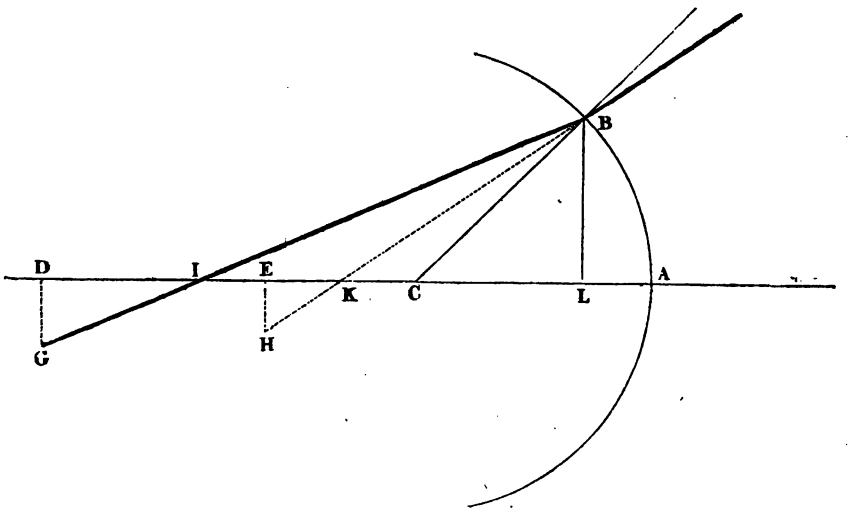
Wir setzen nun

$$CB = CA = r, \quad BL = h, \quad LA = g$$
$$DG = l, \quad DA = k, \quad EH = \lambda, \quad EA = \varkappa$$
$$JA = t, \quad KA = \tau$$

und ersehen unmittelbar, dass

$$h^2 = g\,(2r - g) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Fig. 4.



und, wenn wir zum benachbarten Einfallspunkte übergehen,

$$h\,\partial h = (r - g)\,\partial g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

wird. Die Aehnlichkeit der Dreiecke DJG und LJB ergiebt dann

$$DG : DJ = LB : LJ,$$

$$l : k - t = h : t - g$$

oder

$$h\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{g}{t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Wir werden in dieser wie in unseren früheren Untersuchungen die in h^4 multiplicirten Glieder vernachlässigen und also nur Glieder der ersten und der zweiten Dimension in Rechnung ziehen. Da nach Gleichung (61) g von derselben Ordnung klein, wie h^2 ist, so wird statt Gleichung (63) behuf Substitution in Glieder zweiter Dimension auch gesetzt werden dürfen:

$$2rg\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{l^2}{k^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Gehen wir nun vom Strahle GB zum benachbarten über, indem wir G als gemeinsamen Ausgangspunkt beider festhalten,

und somit nur t, g und h als veränderlich betrachten, so ergiebt sich durch Differentiation der Gleichung (63)

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\partial h+\frac{1}{k}\frac{1}{t}\,\partial g=-\left(h+\frac{1}{k}g\right)\partial\frac{1}{t}$$

und nach leichten Umformungen

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{g}{t}\right)h\,\partial h+\frac{1}{k}\left(1-\frac{g}{t}\right)h\,\frac{1}{t}\,\partial g$$
$$=-\left[h^2\left(1-\frac{g}{t}\right)+\frac{1}{k}\left(1-\frac{g}{t}\right)hg\right]\partial\frac{1}{t},$$

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left[\left(1-\frac{g}{t}\right)(r-g)+(2r-g)g\,\frac{1}{t}\right]\partial g$$
$$=-(2r-g)g\left[1-\frac{g}{t}+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)g\right]\partial\frac{1}{t},$$

$$\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{g}{t}-\frac{g}{r}\right]\partial g=-2g\left[1-\frac{g}{2r}-\frac{g}{k}\right]\partial\frac{1}{t}$$

und endlich

$$-2g\,\partial\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{g}{t}+\frac{g}{k}-\frac{g}{2r}\right]\partial g\,. \quad . \quad (65)$$

In derselben Weise, wie die Gleichungen (63), (64) und (65) welche sich auf den einfallenden Strahl GB und den benachbarten beziehen, abgeleitet wurden, lassen sich auch durch Betrachtung des gebrochenen Strahles BH und des benachbarten, für welche H der gemeinsame Punkt ist, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)&=\frac{\lambda}{\varkappa}\left(1-\frac{g}{\tau}\right)\\ 2rg\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)^2&=\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\\ -2g\,\partial\frac{1}{\tau}&=\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)\left[1+\frac{g}{\tau}+\frac{g}{\varkappa}-\frac{g}{2r}\right]\partial g\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

entwickeln, wobei aber zu bemerken ist, dass in der zweiten dieser Gleichungen die Glieder zweiter Dimension vernachlässigt sind.

Wir haben nun zu berücksichtigen, dass GB und BH als einfallender und gebrochener Strahl zusammengehören, und da diese Strahlen die Achse in den Entfernungen $JA = t$ und $KA = \tau$ vom Flächenscheitel durchschneiden, so kann der Zusammenhang dieser Werthe aus der Gleichung (1) entnommen werden, und diese ergiebt

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\tau}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)h^2=\frac{n}{r}-\frac{n}{\tau}-\frac{1}{2}\frac{n}{t}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\tau}\right)h^2.$$

Da in den Gliedern der zweiten Dimension

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{t}=\frac{n}{r}-\frac{n}{\tau}$$

gesetzt werden darf und ausserdem Gleichung (61) Anwendung findet, so wird auch

$$n\left\{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}\right)^2 rg\right\}=\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2 rg\right\}$$

und, wenn wir

$$\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}\right)^2 rg=\Pi \text{ und } \frac{1}{t}-\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2 rg=P \quad (67)$$

setzen,

$$n\,\Pi=P.$$

Es sollen nun aber auch die zu GB und BH benachbarten Strahlen als einfallender und gebrochener Strahl zusammengehören, d. h. es muss

$$n\,\partial\Pi=\partial P$$

und danach auch

$$n\left\{-2g\frac{\partial\Pi}{\partial g}-\Pi\right\}=\left\{-2g\frac{\partial P}{\partial g}-P\right\} \quad \ldots \quad (68)$$

sein. Die Differentiation ist so zu verstehen, dass unter Festhaltung der Punkte G und H vom Einfallspunkte B zum benachbarten übergegangen wird, und es sind daher ausser der unabhängig Veränderlichen g nur noch t und τ nach Massgabe der vorhin entwickelten Gleichungen als veränderlich zu betrachten.

Die Gleichung (67) ergiebt

$$\partial P=\partial\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{r}\right)rg\,\partial\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{1}{t}r\,\partial g$$

und, mit Benutzung von Gleichung (65), sowie unter Vernachlässigung der in g^2 multiplicirten Glieder,

$$-2g\frac{\partial P}{\partial g}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{g}{t}+\frac{g}{k}-\frac{g}{2r}\right]$$
$$-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)rg+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{2}{t}rg.$$

Subtrahiren wir den Werth von P aus Gleichung (67), so wird auch

$$-2g\frac{\partial P}{\partial g}-P=\frac{1}{r}-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{k}-\frac{1}{2r}\right]g$$
$$-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{3}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)rg+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{3}{t}\,rg$$

oder, wenn wir den drei letzten Gliedern eine andere Form geben,

$$-2g\frac{\partial P}{\partial g}-P=\frac{1}{r}-\frac{1}{k}$$
$$+\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{3}{2r^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)+\frac{3}{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\right]rg.$$

Da nun in derselben Weise entwickelt

$$-2g\frac{\partial \Pi}{\partial g}-\Pi=\frac{1}{r}-\frac{1}{\varkappa}$$
$$+\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)^2+\frac{3}{2r^2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)+\frac{3}{\varkappa}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}\right)^2\right]rg$$

wird, so erhalten wir, auf Gleichung (68) gestützt,

$$n\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{\varkappa}+\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)^2+\frac{3}{2r^2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)+\frac{3}{\varkappa}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{r}\right)^2\right]rg\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{k}+\left[-\frac{1}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{3}{2r^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)+\frac{3}{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\right]rg\right\}$$

oder auch

$$\frac{n}{r}-\frac{n}{\varkappa}+\left[-\frac{n}{r}\left(\frac{n}{\tau}-\frac{n}{\varkappa}\right)^2+\frac{3n^2}{2r^2}\left(\frac{n}{\tau}-\frac{n}{\varkappa}\right)+\frac{3n}{\varkappa}\left(\frac{n}{\tau}-\frac{n}{r}\right)^2\right]\frac{rg}{n^2}$$
$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{k}+\left[-\frac{n^2}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{3n^2}{2r^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)+\frac{3n^2}{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\right]\frac{rg}{n^2}.$$

In den Gliedern der zweiten Dimension darf dieser und den früheren Gleichungen zufolge

$$\frac{n}{r}-\frac{n}{\varkappa}=\frac{1}{r}-\frac{1}{k},\quad \frac{n}{r}-\frac{n}{\tau}=\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\quad\text{und}\quad \frac{n}{\tau}-\frac{n}{\varkappa}=\frac{1}{t}-\frac{1}{k}$$

gesetzt werden, so dass

$$\frac{n}{\varkappa}=\frac{1}{k}+\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{n^2}\left[\frac{n}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{3n+3}{k}-\frac{3}{r}\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{r}\right)^2\right]rg$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (64)

$$\frac{n}{\varkappa}=\frac{1}{k}+\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r}-\left(\frac{3n+3}{k}-\frac{3}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}\quad\ldots\quad(69)$$

sich ergiebt.

Durch Combination der zweiten der Gleichungen (66) mit Gleichung (64) erhalten wir, auf Glieder der ersten Dimension beschränkt

$$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2=\frac{l^2}{k^2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\varkappa}\right)^2$$

und da hierin

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{k}=\frac{n}{\tau}-\frac{n}{\varkappa}$$

gesetzt werden darf, so wird auch

$$n^2\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}=\frac{l^2}{k^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Durch diese Gleichung und die Gleichung (69) ist die Lage des Bildpunktes vollständig bestimmt. Da zu verschiedenen Einfallspunkten auch verschiedene Werthe von t und somit auch von $\varkappa$ und λ gehören, so werden, allgemein zu reden, nicht sämmtliche von G ausgehende Strahlen nach der Brechung in einem einzigen Bildpunkte zusammentreffen; es ergeben vielmehr je zwei benachbarte gebrochene Strahlen einen besonderen Durchschnittspunkt und auch das Bild des nicht der Achse angehörigen Punktes G wird daher mit Abweichung, der sogenannten sphärischen Randabweichung behaftet sein.

Es wäre nun ferner möglich, die für λ aufgestellte Gleichung (70) durch die Glieder der zweiten Dimension zu vervollständigen, und dann aus ihr und Gleichung (69) durch Elimination von t eine Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ, d. h. die Gleichung der, die sämmtlichen gebrochenen Strahlen einhüllenden Linie abzuleiten. Da aber die Resultate sehr complicirt und auch nicht geeignet sein würden, auf den Fall der Brechung durch mehrere Kugelflächen übertragen zu werden, so wird es sich empfehlen, für unsere Untersuchung eine andere Form zu wählen.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass unter Voraussetzung eines festliegenden leuchtenden Punktes der Einfallspunkt durch den Werth t bestimmt wurde. Statt desselben könnte auch h oder g in die vorstehenden Gleichungen eingeführt werden; doch verdient die Ausdrucksweise durch t deshalb den Vorzug, weil bei der Brechung durch mehrere Kugelflächen die Achsenschnitte der abbildenden Strahlen leicht auf einander zurückzuführen sind.

Gestützt auf die Gleichungen (69) und (70) würde auch die Abbildung eines ausserhalb der Achse befindlichen Punktes durch

ein beliebiges dioptrisches System entwickelt werden können; wir verzichten jedoch auf die Durchführung dieser Untersuchung, da ein etwas verallgemeinerter Gesichtspunkt die Betrachtung wesentlich vereinfachen wird.

β. Abbildung durch einen zur Achse windschiefen Strahl.

Um die Lösung der vorliegenden Aufgabe vorzubereiten, wollen wir zwei auf rechtwinklige Coordinaten bezogene windschiefe Gerade voraussetzen und die Punkte kürzester Entfernung bestimmen.

Die eine Gerade gehe durch die Punkte (a, b, c) und (x, y, z) und schliesse mit den Achsenrichtungen Winkel ein, deren Cosinus gleich α, β und γ. Für die zweite Gerade möge den gleichen, aber accentuirten Buchstaben die entsprechende Bedeutung beigelegt werden. Nennen wir ferner ω den Cosinus des von den Richtungen der Windschiefen eingeschlossenen Winkels, so dürfen wir

$$\frac{a - x}{\alpha} = \frac{b - y}{\beta} = \frac{c - z}{\gamma} = p = \sqrt{\Sigma (a - x)^2}$$

$$\frac{a_1 - x_1}{\alpha_1} = \frac{b_1 - y_1}{\beta_1} = \frac{c_1 - z_1}{\gamma_1} = p_1 = \sqrt{\Sigma (a_1 - x_1)^2}$$

$$\omega = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \frac{\Sigma (a - x)(a_1 - x_1)}{pp_1}$$

setzen, vorausgesetzt, dass die Summation stets auf die drei Coordinatenrichtungen erstreckt wird. Soll der Punkt (ξ, η, ζ) der einen, der Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) der anderen Geraden angehören, so ist

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma} = \pi$$

$$\frac{\xi_1 - x_1}{\alpha_1} = \frac{\eta_1 - y_1}{\beta_1} = \frac{\zeta_1 - z_1}{\gamma_1} = \pi_1,$$

und wenn wir jene Punkte als solche in kürzester Entfernung annehmen, auch

$$\Sigma\alpha (\xi - \xi_1) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\alpha_1 (\xi - \xi_1) = 0$$

zu setzen. Aus diesen Gleichungen ersehen wir unmittelbar, dass

$$\Sigma\alpha (\alpha_1\pi_1 - \alpha\pi) + \Sigma\alpha (x_1 - x) = 0$$
$$\Sigma\alpha_1 (\alpha_1\pi_1 - \alpha\pi) + \Sigma\alpha_1 (x_1 - x) = 0$$

oder

$$\omega\pi_1 - \pi + \Sigma\alpha (x_1 - x) = 0$$
$$\pi_1 - \omega\pi + \Sigma\alpha_1 (x_1 - x) = 0$$

oder

$$(1 - \omega^2)\,\pi = \Sigma\alpha\,(x_1 - x) - \omega\,\Sigma\alpha_1\,(x_1 - x)$$

werden muss. Eliminiren wir nun, den früheren Gleichungen zufolge ω, α, β, γ, α_1, β_1 und γ_1, so ergiebt sich

$$\frac{\Sigma\left[(a-x)\,(b_1-y_1) - (b-y)\,(a_1-x_1)^2\right]}{p^2 p_1^2}\pi$$

$$= \frac{\Sigma\,(a-x)\,(x_1-x)}{p} - \frac{\Sigma\,(a-x)\,(a_1-x_1)}{p\,p_1} \cdot \frac{\Sigma\,(a_1-x_1)\,(x_1-x)}{p_1}$$

und, wenn auch p und p_1 fortgeschafft werden,

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\xi - x}{a - x} = \frac{\eta - y}{b - y} = \frac{\zeta - z}{c - z}$$

$$= \frac{\Sigma\left[(x_1-x)(b_1-y_1) - (y_1-y)(a_1-x_1)\right]\left[(a-x)(b_1-y_1) - (b-y)(a_1-x_1)\right]}{\Sigma\left[(a-x)\,(b_1-y_1) - (b-y)\,(a_1-x_1)\right]^2}$$

Die zur Bestimmung von π_1, ξ_1, η_1 und ζ_1 dienenden Gleichungen ergeben sich in ähnlicher Weise.

Zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehend, setzen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraus, dessen Anfangspunkt mit dem Scheitel, und dessen X-Achse mit der Achse der brechenden Kugelfläche zusammenfällt. Der leuchtende Punkt sei (k, 0, l) und durch ihn gehe ein zur Achse windschiefer Strahl, der den Punkt (t, m, 0) enthalten und im Punkte (x, y, z) die Kugelfläche treffen soll; der benachbarte Strahl sei ausser dem leuchtenden Punkte durch den Punkt (t, $m + \partial m$, o) bestimmt und habe den Einfallspunkt ($x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$). Die höheren als zweiten Potenzen von l und m sollen gegen k, t und den Kugelradius r vernachlässigt werden. Die Bestimmung der Einfallspunkte gründet sich auf die Gleichungen

$$\frac{t - x}{k - x} = \frac{m - y}{-y} = \frac{-z}{l - z}$$

und diese ergeben, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{k} = \frac{1}{v}$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{m}{t}\,v\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad z = -\frac{l}{k}\,v\left(1 - \frac{x}{t}\right)$$

sowie

$$\partial y = \frac{v}{t}\left(1 - \frac{x}{k}\right)\partial m - \frac{m}{t}\cdot\frac{v}{k}\partial x \quad \text{und} \quad \partial z = \frac{l}{k}\cdot\frac{v}{t}\partial x.$$

Die Gleichung der Kugelfläche liefert ausserdem

$$(2r - x)\,x = y^2 + z^2$$

oder

$$x = \frac{v^2}{2r}\left(\frac{m^2}{t^2} + \frac{l^2}{k^2}\right)$$

und

$$\partial x = \frac{v^2}{rt}\cdot\frac{m}{t}\,\partial m.$$

Es sei $(\tau, \mu, 0)$ der Punkt, in welchem der erste windschiefe Strahl nach der Brechung die XY-Ebene durchschneidet; derselbe wird, dem Brechungsgesetze zufolge mit (t, m, 0) und dem Kugelmittelpunkte auf einer geraden Linie liegen, so dass

$$\mu = m\,\frac{\tau - r}{t - r}.$$

Sehen wir diese gerade Linie für einen Augenblick als Achse, ihren Durchschnitt mit der Kugelfläche als Scheitel derselben an, und bezeichnen die Entfernungen der Punkte (t, m, 0) und $(\tau, \mu, 0)$ von diesem Scheitel resp. durch T und T, sowie das vom Einfallspunkte (x, y, z) auf diese Achse gefällte Loth durch h, so dürfen wir, da mit dieser zeitweiligen Achse der einfallende und der gebrochene Strahl in einer Ebene liegen, zwischen den Vereinigungsweiten T und T die Gleichung

$$\frac{n}{T} = \frac{1}{T} + \frac{n-1}{r} - s\,h^2$$

ansetzen, wenn unter s der Werth

$$s = \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{T} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{T}\right)^2$$

verstanden wird. Da dann offenbar auch

$$(T-r)^2 = (\tau - r)^2 + \mu^2 \quad \text{und} \quad (T-r)^2 = (t-r)^2 + m^2,$$

sowie

$$h^2 = z^2 + \left((r - x)\,\frac{m}{T-r} + y\,\frac{t-r}{T-r}\right)^2,$$

so haben wir genügende Anhaltspunkte, um τ und μ auf t und m zurückführen zu können. Eliminiren wir zu dem Ende aus den vorstehenden Gleichungen T und T, führen die früheren Werthe für x, y und z ein und berücksichtigen stets, dass die höheren

als zweiten Potenzen von l und m zu vernachlässigen sind, so ergiebt sich

$$\frac{n}{\tau} = \frac{1}{t} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{m^2}{t^2} - s\,h^2$$

und hierin ist

$$s = \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{n+1}{t} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right)^2$$

und

$$h^2 = v^2 \frac{l^2}{k^2} + \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{t}}\right)^2 v^2 \frac{m^2}{t^2}.$$

Setzen wir ferner voraus, dass der, dem ersten windschiefen benachbarte Strahl nach der Brechung die XY-Ebene im Punkte $(\tau + \partial\tau,\ \mu + \partial\mu,\ 0)$ durchschneide, so ist ersichtlich

$$\partial\mu = \frac{\tau - r}{t - r}\,\partial m + \frac{m}{t - r}\,\partial\tau,$$

$$\frac{n}{\tau^2}\,\partial\tau = -\frac{n-1}{n}\,\frac{1}{tr}\,\frac{m}{t}\,\partial m + s\,\partial h^2$$

und hierin

$$\partial h^2 = \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{t}}\right)^2 \frac{2v^2}{t}\,\frac{m}{t}\,\partial m$$

zu setzen.

Wir haben nunmehr den ersten gebrochenen Strahl durch die Punkte $(\tau, \mu, 0)$ und (x, y, z), den dazu benachbarten gebrochenen Strahl durch die Punkte $(\tau + \partial\tau,\ \mu + \partial\mu,\ 0)$ und $(x + \partial x,\ y + \partial y,\ z + \partial z)$ vollständig festgelegt; berücksichtigen wir, dass beide, allgemein zu reden, zu einander windschief, so werden wir den Ort des Bildes vom leuchtenden Punkte auf dem ersteren Strahle da, wo ihm der zweite am nächsten kommt, also im Punkte kürzester Entfernung anzunehmen haben. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses Punktes durch $\varkappa$, χ und λ und wenden die allgemeinen, zur Bestimmung des Punktes kürzester Entfernung entwickelten Formeln auf diesen Fall an, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\varkappa - x}{\tau - x} = \frac{\chi - y}{\mu - y} = \frac{\lambda - z}{-z}$$

$$= \Big\{ \big[(\mu - y)\partial x - (\tau - x)\partial y + \partial\mu\,\partial x - \partial\tau\partial y\big]$$

$$\big[(\tau - x)(\partial\mu - \partial y) - (\mu - y)(\partial\tau - \partial x)\big]$$

$$+ \big[(-z)\partial y - (\mu - y)\partial z - \partial\mu\,\partial z\big]\big[(\mu - y)(-\partial z) - (-z)(\partial\mu - \partial y)\big]$$

$$+ \big[(\tau - x)\partial z - (-z)\partial x + \partial\tau\,\partial z\big]\big[(-z)(\partial\tau - \partial x) - (\tau - x)(-\partial z)\big]$$

$$\Big\{\big[(\tau - x)(\partial\mu - \partial y) - (\mu - y)(\partial\tau - \partial x)\big]^2$$

$$+ \big[(\mu - y)(-\partial z) - (-z)(\partial\mu - \partial y)\big]^2 + \big[(-z)(\partial\tau - \partial x) - (\tau - x)(-\partial z)\big]^2$$

Vernachlässigen wir nun die Glieder, in welchen ∂m^2 oder auch mehr als zwei von den kleinen Factoren m und l enthalten sind, so dürfen wir einfacher

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\varkappa - x}{\tau - x} = \frac{\chi - y}{\mu - y} = \frac{\zeta - z}{-z} =$$

$$- \Big\{\Big[\partial y - \frac{\mu - y}{\tau - x}\partial x\Big]\Big[\partial\mu - \partial y - \frac{\mu - y}{\tau - x}(\partial\tau - \partial x)\Big] + \frac{z^2}{(\tau - x)^2}\partial y(\partial\mu - \partial x)\Big\}$$

$$\Big\{\Big[\partial\mu - \partial y - \frac{\mu - y}{\tau - x}(\partial\tau - \partial x)\Big]^2 + \frac{z^2}{(\tau - x)^2}(\partial\mu - \partial x)^2\Big\}$$

oder auch

$$= -\Big[\partial y - \frac{\mu - y}{\tau - x}\partial x\Big] : \Big[\partial\mu - \partial y - \frac{\mu - y}{\tau - x}(\partial\tau - \partial x)\Big]$$

setzen, da die letzten Glieder im Dividend und Divisor des vorigen Ausdrucks den von l und m unabhängigen Theilen ∂y $(\partial\mu - \partial y)$ und $(\partial\mu - \partial y)^2$ proportional sind, und folglich weggelassen werden können, dann aber ein gemeinschaftlicher Factor zur Aufhebung gelangt. Die Ausführung der Division liefert aber

$$\frac{\pi}{p} = \frac{\varkappa - x}{\tau - x} = \frac{\chi - y}{\mu - y} = \frac{\lambda - z}{-z} = -\frac{\partial y}{\partial\mu - \partial y} - \frac{\mu - y}{\tau - x}\frac{\partial y\,\partial\tau - \partial x\,\partial\mu}{(\partial\mu - \partial y)^2}.$$

Wir berechnen zunächst den Werth $\varkappa$; um aber diese Coordinate des Bildpunktes in gewohnter Weise verwenden zu können, entnehmen wir den vorstehenden Gleichungen den Werth

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{n}{\tau}\left(1 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{x}{\tau}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) + \frac{\mu - y}{\tau}\cdot\frac{n}{\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)$$

und führen vorläufig für y, ∂y, μ, $\partial\mu$ die früher entwickelten Werthe ein. Es ist, wenn wir allmählich die Substitutionen ausführen,

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left\{\frac{\tau - r}{t - r}\partial m + \frac{m}{t - r}\partial\tau\right\} : \left\{\frac{v}{t}\left(1 - \frac{x}{k}\right)\partial m - \frac{m}{t}\cdot\frac{v}{k}\partial x\right\}$$

$$= \frac{\tau}{n}\frac{1}{v}\left(\frac{n}{r} - \frac{n}{\tau}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) + \frac{m}{rv}\frac{\partial\tau}{\partial m} : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) + \frac{\tau}{n}\cdot\frac{x\partial m + m\partial x}{kv\partial m}$$

und danach

$$\frac{n}{\tau}\left(1 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = \frac{n}{\tau} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{n}{r} - \frac{n}{\tau}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) - \frac{n}{\tau}\frac{m}{rv}\frac{\partial\tau}{\partial m} : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) - \frac{x\partial m + m\partial x}{kv\partial m}$$

sowie nach Substitution des für $n:\tau$ erhaltenen Ausdruckes

$$\frac{n}{\tau}\left(1 - \frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n}\cdot\frac{m^2}{t^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right)$$

$$- sh^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) - \frac{n}{\tau}\frac{m}{rv}\frac{\partial\tau}{\partial m} : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) - \frac{x\partial m + m\partial x}{kv\partial m}$$

zu setzen. In den anderen Ausdrücken darf ihrer Kleinheit wegen die Substitution unter Vernachlässigung von l^2 und m^2 ausgeführt werden, so dass dort

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\tau}{n}\cdot\frac{1}{v}, \quad \frac{x}{\tau}\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{x}{nv}$$

$$\mu - y = m\frac{\tau - r}{t - r} - m\frac{v}{t}$$

$$= -m\frac{\tau}{n}\frac{v}{t}\left(\frac{1}{k} + \frac{n-1}{r}\right)$$

und

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{t}{v}\frac{\partial\tau}{\partial m} - \frac{t\tau}{nv^2}\frac{\partial x}{\partial m}$$

zu nehmen ist. Es resultirt demnach

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n}\frac{m^2}{t^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right)$$

$$- sh^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) + \left[\frac{n}{rv} : \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r}\right]\frac{m}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial m}$$

$$+ \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)\frac{\varkappa}{v} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)\frac{m}{v}\frac{\partial x}{\partial m}$$

oder

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n}\frac{m^2}{t^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right):\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)$$
$$- s h^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right):\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right) - m\frac{n}{\tau^2}\frac{\partial\tau}{\partial m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right):\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{v}\left[x + m\frac{\partial x}{\partial m}\right]$$

und nach Elimination von $\partial\tau$, ∂x und x

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n}\,3\frac{m^2}{t^2}\cdot\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right):\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)$$
$$- s\left[h^2 + m\frac{\partial h^2}{\partial m}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right):\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{2n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)\frac{v}{r}\left[3\frac{m^2}{t^2} + \frac{l^2}{k^2}\right]$$

Schaffen wir nun noch s, h^2 und ∂h^2 fort, so ergiebt sich

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{2n}\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{k}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{t}}$$
$$\left\{3\frac{m^2}{t^2}v^2\left[\frac{n}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{n}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{l^2}{k^2}v^2\left[-\left(\frac{n+1}{t}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{n}{r}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)\right]\right\}$$

sowie nach einigen Reductionen

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)^2 3\frac{m^2}{t^2}:\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\right)^2$$
$$+ \frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r} - \left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}.$$

Entnehmen wir χ und λ statt des eben berechneten $\varkappa$ der für alle drei Werthe entwickelten Gleichung, so erhalten wir unter

Vernachlässigung der mehr als zwei der kleinen Factoren l und m enthaltenden Glieder

$$\chi = \left(y\frac{\partial\mu}{\partial y} - \mu\right) : \left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - 1\right) = \frac{\tau}{nt}\left(1 - n\frac{t(\tau - r)}{\tau(t - r)}\right) m : \left(\frac{\tau}{nv} - 1\right)$$

$$= \left(1 - n\frac{t(\tau - r)}{\tau(t - r)}\right)\frac{m}{t} : \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{t}\right)$$

$$= 0$$

und

$$\lambda = z\frac{\partial\mu}{\partial y} : \left(\frac{\partial\mu}{dy} - 1\right) = -\frac{l}{k} : \left(\frac{1}{v} - \frac{n}{\tau}\right) = \frac{l}{k} : \left(\frac{1}{k} + \frac{n-1}{r}\right)$$

$$= \frac{l}{k} : \frac{n}{\varkappa},$$

so dass

$$n\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{l}{k}$$

wird. Es sind hiermit die Coordinaten des Bildpunktes auf die des leuchtenden Punktes zurückgeführt, wobei der Einfallspunkt aber nicht direct, sondern als durch die Werthe t und m bestimmt, vorausgesetzt wurde. Da $\chi = 0$ sich ergeben hat, so liegt der Bildpunkt in der durch den leuchtenden Punkt und die Achse gelegten Ebene.

2. Abbildung eines Complexes von leuchtenden Punkten, welche in einer zur Achse des Systems gehörenden Rotationsfläche liegen.

a. Bestimmung der Bildfläche.

α. Nach der Brechung durch eine Kugelfläche.

Wir setzen also voraus, dass die, die leuchtenden Punkte enthaltende Rotationsfläche, wir wollen sie kurz die Objectfläche nennen, mit dem optischen Systeme die Achse gemeinschaftlich habe. Die im Artikel 1 a. dieser Abtheilung durchgeführten Betrachtungen lassen dann ersehen, nach welchen Gesetzen, selbst nach der Brechung durch irgend ein dioptrisches System, ein Bild des Scheitelpunktes dieser Objectfläche zu Stande kommen wird.

Wie die anderen Punkte derselben sich abbilden, ergiebt sich am besten, wenn wir vorerst von den sämmtlichen, den leuchtenden Punkten entstammenden Strahlen diejenigen herausgreifen, welche in einer bestimmten Entfernung t vom Scheitel der brechenden Kugelfläche die Achse durchschneiden. Es gehört, wenn wir uns zunächst auf diese Strahlengruppe beschränken, zu jedem leuchtenden Punkte nur ein Bildpunkt und es wird dann diejenige Fläche zu untersuchen sein, welche die sämmtlichen Bildpunkte enthält.

Behalten wir die im vorigen Artikel unter b α) eingeführten Bezeichnungen bei, so entspricht den Gleichungen (71) und (72) zufolge dem durch k und l bestimmten Objectpunkte ein durch $\varkappa$ und λ festgelegter Bildpunkt, wenn

$$\frac{n}{\varkappa}=\frac{1}{k}+\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r}-\left(\frac{3n+3}{k}-\frac{3}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2} \quad . \quad (71)$$

und

$$n^2\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}=\frac{l^2}{k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Setzen wir die in der Achse befindlichen Object- und Bildpunkte in der Entfernung k_0 resp. $\varkappa_0$ vom Scheitel der brechenden Kugelfläche voraus, so erhalten wir, indem wir in Gleichung (71) $l = 0$ nehmen,

$$\frac{n}{\varkappa_0}=\frac{1}{k_0}+\frac{n-1}{r}$$

und durch Subtraction der Gleichung (71) von dieser

$$n\frac{\varkappa-\varkappa_0}{\varkappa\varkappa_0}=\frac{k-k_0}{kk_0}-\frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r}-\left(\frac{3n+3}{k}-\frac{3}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}.$$

Da nun für lim. $l = 0$ in den Nennern der ersten Brüche $\varkappa = \varkappa_0$ und $k = k_0$ gesetzt werden kann, und da unter der gleichen Voraussetzung

$$2(\varkappa-\varkappa_0)\pi=\lambda^2 \quad \text{und} \quad 2(k-k_0)p=l^2,$$

wenn unter π und p die Krümmungshalbmesser der Bild- und Objectfläche im Scheitel und zwar in dem Sinne verstanden werden,

dass diese Werthe positiv zu nehmen sind, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite der einfallenden Strahlen liegt, so ist auch

$$n\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\frac{1}{\pi}=\frac{l^2}{k^2}\frac{1}{p}-\frac{n-1}{n^2}\left[\frac{n}{r}-\left(\frac{3n+3}{k}\frac{3}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}.$$

Benutzen wir nun die Gleichung (72), so wird

$$\frac{1}{\pi}=\frac{n}{p}-\frac{n-1}{n}\left[\frac{n}{r}-\left(\frac{3n+3}{k}-\frac{3}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right] \quad . . \quad (73)$$

und es ist durch diese Gleichung der Zusammenhang zwischen dem Krümmungshalbmesser der Bild- und dem der Objectfläche aufgestellt, zugleich aber gezeigt, dass, jenachdem zur Formation des Bildes Strahlen verwendet werden, welche in grösserer oder geringerer Entfernung vom Flächenscheitel die Achse schneiden, auch verschieden gekrümmte Bildflächen sich ergeben. Da wir zur Berechnung des Krümmungshalbmessers lim $l = 0$ setzten, so wird der Werth k nunmehr auch als Entfernung des Scheitels der Object- vom Scheitel der brechenden Kugelfläche anzusehen sein.

Der Verfasser hat die vorstehende Formel zuerst im 95. Bande von Poggendorf's Annalen mitgetheilt und zugleich nachgewiesen, dass die früher von Professor Dr. Petzval gegebene Bestimmung der Bildkrümmung nur in dem für die Wirklichkeit bedeutungslosen Falle richtig ist, in welchem sämmtliche brechende Flächen concentrisch sind, und die Strahlen durch den gemeinsamen Mittelpunkt des Systems gehen.

Wir greifen nun ferner eine Gruppe zur Achse windschiefer Strahlen heraus. Zu dem Ende denken wir uns durch jeden leuchtenden Punkt und die Achse eine Ebene gelegt; die zu jeder solchen senkrechte, ebenfalls durch die Achse gelegte Ebene werde vom bezüglichen abbildenden Strahle in einem Punkte durchschnitten, für welchen das auf die Achse gefällte Loth die Länge m und die Entfernung t vom Scheitel der brechenden Fläche hat. Diese Durchschnittspunkte und ebenso die abbildenden Strahlen werden hiernach die Achse symmetrisch umgeben, und wie die leuchtenden Punkte werden nun auch die Bildpunkte auf einer zur optischen

Achse gehörenden Rotationsfläche liegen, deren Krümmungshalbmesser aus irgend einem der Achsenschnitte entnommen werden kann.

Eignen wir uns die unter bβ) des vorigen Artikels eingeführten Bezeichnungen an, so entspricht dem leuchtenden Punkte (k, 0, l) der durch den windschiefen Strahl hervorgerufene Bildpunkt ($\varkappa$, 0, λ). Letzterer gehört demselben Achsenschnitte an und ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{k} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2 3\frac{m^2}{t^2} : \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k}\right)^2$$

$$+ \frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r} - \left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}$$

und

$$n\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{k}.$$

Für $l = 0$ wird auch $\lambda = 0$, es entsprechen sich daher die Scheitel der Object- und der Bildfläche und nennen wir k_0 resp. $\varkappa_0$ deren Entfernungen vom Scheitel der brechenden Fläche, so wird

$$\frac{n}{\varkappa_0} = \frac{1}{k_0} + \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{n+1}{k_0} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k_0}\right)^2 . 3\frac{m^2}{t^2} : \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{k_0}\right)^2.$$

Da in den kleinen Gliedern k_0 mit k und $\varkappa_0$ mit $\varkappa$ vertauscht werden darf, so ergeben die vorstehenden Gleichungen auch

$$n\frac{\varkappa - \varkappa_0}{\varkappa_0 \varkappa} = \frac{k - k_0}{k_0 k} - \frac{n-1}{2n^2}\left[\frac{n}{r} - \left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2}.$$

Bezeichnen wir mit ω und o die Krümmungshalbmesser der Bild- und Objectfläche im Scheitel und zwar in dem Sinne, dass diese Werthe positiv zu nehmen sind, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite der einfallenden Strahlen liegt, so ist für lim. $l = 0$

$$2(k - k_0)\, o = l^2 \quad \text{und} \quad 2(\varkappa - \varkappa_0)\, \omega = \lambda^2$$

und folglich

$$n\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\frac{1}{\omega} = \frac{l^2}{k^2}\frac{1}{o} - \frac{n-1}{n^2}\left[\frac{n}{r} - \left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right]\frac{l^2}{k^2},$$

da nun auch in den ersten Gliedern der Gleichung die Vertauschung von k_0 mit k und $\varkappa_0$ mit $\varkappa$ gestattet. Benutzen wir nun noch die Beziehung zwischen l und λ, so erhalten wir zur Berechnung der Bildkrümmung die Gleichung

$$\frac{1}{\omega} = \frac{n}{o} - \frac{n-1}{n}\left[\frac{n}{r} - \left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{t}-\frac{1}{k}}\right)^2\right],$$

in welcher k auch vom Scheitel der Object- bis zu dem der brechenden Fläche gerechnet werden darf. Zunächst ist ersichtlich, dass die Krümmung der Bildfläche von m unabhängig ist, so lange diese Grösse kleine Werthe hat. Alle Strahlengruppen, welche demselben Werthe von t zugehören, liefern daher gleichgekrümmte Bilder; zum Zusammenfall gelangen diese Bildflächen jedoch nicht, da die Lage ihrer Scheitelpunkte von $\varkappa_0$ abhängig ist, und diese Grösse mit m verschiedene Werthe annimmt, welche zu der sphärischen Abweichung in einer leicht zu ersehenden Beziehung stehen. Strahlengruppen, welche verschiedenen Werthen von t zugehören, liefern natürlich verschiedene Systeme von Bildflächen und zwar mit verschiedenen Krümmungen. Da deren Berechnung, wie oben bemerkt, von m unabhängig ist, so kann auch $m = 0$ gesetzt und t folglich als Entfernung des Scheitels der brechenden Fläche von demjenigen Punkte der Achse aufgefasst werden, welcher von den windschiefen Strahlen, sobald diese sich der Achse mehr und mehr nähern, im Grenzfalle getroffen wird. Stimmt dieser Punkt mit demjenigen überein, in welchem der im Achsenschnitt verlaufende Strahl die Achse schneidet, so hat offenbar t dieselbe Bedeutung in der vorstehenden, und in der Gleichung (73), so dass mit Benutzung dieser der letztentwickelten Gleichung auch die Form

$$\frac{1}{\omega} = \frac{n}{o} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{n}{p}\right) - \frac{2}{3}\frac{n-1}{r}$$

gegeben werden kann.

β. **Nach der Brechung durch eine Linse, mit Berücksichtigung der Linsendicke.**

Die im Artikel 2 des ersten Theils eingeführten Bezeichnungen, welche bekanntlich für die auf die Hinterfläche bezogenen Grössen Buchstaben ohne Accent, für die auf die Vorderfläche bezogenen Grössen aber Buchstaben mit dem Accente ^{0} verwenden, sollen auch hier gelten. Hinzuzufügen ist nur, dass für Strahlen, welche mit der Achse in einer Ebene liegen, p^0 den Krümmungsradius der Objectfläche, π den der Bildfläche nach der ersten und p den der Bildfläche nach der zweiten Brechung bedeute, sowie, dass die zur Abbildung verwendeten Strahlen die Achse vor der ersten Brechung in der Entfernung t^0, nach der zweiten Brechung aber in der Entfernung t vom Scheitel der bezüglichen brechenden Kugelfläche durchschneiden.

Die Gleichung (73) ergiebt dann zunächst

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0} + 3\,\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{\frac{1}{t^0} - \frac{1}{r^0}}{\frac{1}{t^0} - \frac{1}{k^0}}\right)^2$$

und, auf die Brechung durch die Hinterfläche so angewendet, als ob die Strahlen den umgekehrten Weg durchliefen, also die Bildfläche nach der zweiten Brechung zur Objectfläche, die nach der ersten Brechung zur eigentlichen Bildfläche würde,

$$-\frac{1}{\pi} = -\frac{n}{p} + \frac{n-1}{r} + 3\,\frac{n-1}{n}\left(-\frac{n+1}{k} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{-\frac{1}{t} + \frac{1}{r}}{-\frac{1}{t} + \frac{1}{k}}\right)^2$$

oder auch

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p} - \frac{n-1}{r} + 3\,\frac{n-1}{k}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{t} - \frac{1}{k}}\right)^2.$$

Ersetzen wir nun in Zukunft die Grössen t^0 und t stets durch u^0 und u, indem wir den Zusammenhang derselben durch die Gleichungen

$$\frac{1}{t_0} - \frac{1}{k^0} = \frac{1}{u^0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{k} = \frac{1}{u} \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

festsetzen, so erhalten wir

$$\frac{\frac{1}{t^0}-\frac{1}{r^0}}{\frac{1}{t^0}-\frac{1}{k^0}}=1-\frac{\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}}{\frac{1}{t^0}-\frac{1}{k^0}}=1-u^0\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)$$

und demgemäss

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}=\frac{n}{p^0}-\frac{n-1}{r^0}+3\,\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left[1-u^0\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]^2\\ &\text{sowie auch durch analoge Entwickelung}\\ &\frac{1}{\pi}=\frac{n}{p}-\frac{n-1}{r}+3\,\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left[1-u\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)\right]^2\end{aligned}\right\}(75)$$

Wir schreiten nun dazu, auch hier die Werthe auf die Hauptpunkte statt auf die Flächenscheitel zu beziehen. Zunächst gelten dann die Gleichungen (14) und (15), sowie die in den Gleichungen (17), (18) und (19) niedergelegten Folgerungen; ferner ergiebt sich, wenn t^0 und t durch die Gleichungen

$$t^0=t^0+e^0 \quad \text{und} \quad t=t+e$$

eingeführt werden,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{t^0}\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)=\frac{1}{t^0} \text{ und } \frac{1}{t}\left(1+\frac{e}{t}\right)=\frac{1}{t}\\ &\text{und nennen wir endlich } u^0 \text{ und } u \text{ die durch die Gleichungen}\\ &\frac{1}{u^0}=\frac{1}{t^0}-\frac{1}{k^0} \text{ und } \frac{1}{u}=\frac{1}{t}-\frac{1}{k}\end{aligned}\right\}(76)$$

bestimmten Grössen, so wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)&=\frac{1}{t^0}\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)-\frac{1}{k^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)\\ &=\frac{1}{t^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)-\frac{1}{k^0}\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)\\ &=\frac{1}{t^0}-\frac{1}{k^0}\\ &=\frac{1}{u^0}.\end{aligned}$$

Umgekehrt erhalten wir

$$\begin{aligned}u^0&=u^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{t^0}\right)\\ &=u^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}+\frac{e^0}{u^0}\right)\end{aligned}$$

oder auch

$$u^0 = u^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)^2 + e^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

und, wenn dieser Werth in die erste der Gleichungen eingeführt wird,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0}$$

$$+3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left[1-e^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)-u^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)^2\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]^2$$

$$= \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0}$$

$$+3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left[1+\frac{e^0}{k^0}-\frac{e^0}{r^0}\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)-u^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]^2$$

$$= \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0}$$

$$+ 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left[1-\frac{e^0}{r^0}-u^0\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]^2.$$

Entwickeln wir nun nach Potenzen u^0 und benutzen abermals Gleichung (15), so ergiebt sich

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{k^0}\cdot\frac{e^0}{r^0} + 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right)\left(1-\frac{e^0}{r^0}\right)^2$$

$$- 6\frac{n-1}{n}u^0\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\left[1-e^0\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]$$

$$+ 3\frac{n-1}{n}u^{0^2}\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)^2\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right).$$

Da fast immer die Linsendicke von geringer Grösse im Vergleich zu den Radien und den Bildentfernungen sein wird, und somit die den Factor e^0 enthaltenden Glieder gegen die anderen zurückstehen werden, so empfiehlt sich eine, wenigstens theilweise Trennung dieser Glieder und wir gelangen so zu der Gleichung

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0} + 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(1 - \frac{e^0}{r^0}\right)^2$$
$$- 6\frac{n-1}{n} - \left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)$$
$$+ 3\frac{n-1}{n} u^{0^2}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2\left(1 + \frac{e^0}{k^0}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{k^0}\frac{e^0}{r^0} + 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0}\left(1 - \frac{e^0}{r^0}\right)^2$$
$$+ 6\frac{n-1}{n} u^0\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right)^2 e^0$$

welche auch, wenn wir die höchst bemerkenswerthe Verwandtschaft einiger hier vorkommenden Coëfficienten mit dem in Gleichung (22) eingeführten, für die sphärische Abweichung massgebenden Werthe $*s^0$ berücksichtigen, in der kürzeren Form

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p^0} - \frac{n-1}{r^0} + \left(\frac{3n^2-3}{n}\frac{1}{k^0} - \frac{3}{n}\frac{n-1}{r^0}\right)\left(1 - \frac{e^0}{r^0}\right)^2$$
$$- 6\frac{n-1}{n} u^0\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{k^0}\right) + 6n u^{0^2} *s^0\left(1 + \frac{e^0}{k^0}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{k^0}\frac{e^0}{r^0} + 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0}\left(1 - \frac{e^0}{r^0}\right)^2 + 12n u^0 *s^0 e^0$$

dargestellt werden kann. Durch denselben Entwickelungsgang erhalten wir aus der zweiten der Gleichungen (75)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{p} - \frac{n-1}{r} + \left(\frac{3n^2-3}{n}\frac{1}{k} - \frac{3}{n}\frac{n-1}{r}\right)\left(1 - \frac{e}{r}\right)^2$$
$$- 6\frac{n-1}{n} u\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) + 6n u^2 *s\left(1 + \frac{e}{k}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{k}\frac{e}{r} + 3\frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\frac{e}{k}\left(1 - \frac{e}{r}\right)^2 + 12n u *s e.$$

Da t^0 und t angeben, in welchen Entfernungen von den resp. Hauptpunkten die Achse von den zur Abbildung verwendeten Strahlen vor und nach der Brechung geschnitten wird, so ist

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t^0} - \frac{1}{f}$$

und da ferner

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{f},$$

so versteht es sich von selbst, dass

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{k} = \frac{1}{t^0} - \frac{1}{k^0}$$

oder auch

$$u = u^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

sich ergiebt. Berücksichtigen wir ausserdem die Gleichungen (12), (17) und (18), so erhalten wir durch Subtraction der vorstehend für $\frac{1}{\pi}$ entwickelten Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{n}{p} - \frac{n}{p^0} = {} & \frac{1}{f} + \left(\frac{3n^2-3}{n}\frac{1}{f} + \frac{3}{n}\frac{1}{f}\right)\left(1-\frac{e}{r}\right)^2 \\ & + 6\,\frac{n-1}{n}\,u\left[\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right] \\ & + 6\,n\,u^2\left[{}^*s^0\left(1+\frac{e^0}{k^0}\right) - {}^*s\left(1+\frac{e}{k}\right)\right] \\ & + 3\,\frac{n-1}{n}\left[\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0} - \left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\frac{e}{k}\right]\left(1-\frac{e}{r}\right)^2 \\ & + \frac{n-1}{f}\cdot\frac{e}{r} + 12\,n\,u\left[{}^*s^0\,e^0 - {}^*s\,e\right]\end{aligned}$$

oder auch mit Berücksichtigung von Gleichung (23)

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0} = {} & \frac{3n+1}{nf} \\ & + 6\,\frac{n-1}{n^2}\,u\left[\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right] + 6\,u^2 \\ & + \frac{(5n+1)(n-1)}{n^2}\,\frac{d}{r r^0} + 3\,\frac{(n-1)^2}{n^2}\,f\left(\frac{d}{r r^0}\right)^2 \\ & + 3\,\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0} - \left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\frac{e}{k}\right]\left(1+\frac{n-1}{n}\,\frac{f\,d}{r^0 r}\right)^2 \\ & + 12\,u\left[{}^*s^0\,e^0 - {}^*s\,e\right].\end{aligned}$$

Auf die Gleichungen (17) und (18) gestützt, ergiebt sich

$$\begin{aligned}& \frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right] \\ = {} & \frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}-\frac{n^2}{(n-1)f}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}+\frac{n}{(n-1)f}\right)-\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right] \\ = {} & \frac{1}{nf}\left[\frac{2n+1}{k^0} - \frac{n+1}{r^0} - \frac{n^2}{(n-1)f}\right]\end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\left(\frac{1}{r^0}-\frac{1}{k^0}\right)\right]$$

$$\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{k}-\frac{n}{(n-1)f}\right)\right]$$

$$\frac{1}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]$$

und wenn wir ausserdem zur Abkürzung

$$\frac{(5n+1)(n-1)}{n^2}\frac{d}{rr^0}+3\frac{(n-1)^2}{n^2}f\left(\frac{d}{rr^0}\right)^2$$

$$3\frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k^0}-\frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0}-\left(\frac{n+1}{k}-\frac{1}{r}\right)\frac{e}{k}\right]\left(1+\frac{n-1}{n}\frac{fd}{rr^0}\right)^2=c \quad (79)$$

setzen, so gelangen wir zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{p^0}&=\frac{3n+1}{n}\frac{1}{f}+6\frac{u^0}{nf}\left[\frac{2n+1}{k^0}-\frac{n+1}{r^0}-\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+6u^{0^2}s\\&\quad+c+12u^0\,[{}^*s^0e^0-{}^*se]\\ \text{oder}\\-\frac{1}{p^0}&=\frac{3n+1}{n}\frac{1}{f}+6\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+6u^2s\\&\quad+c+12u\,[{}^*s^0e^0-{}^*se]\end{aligned}\right\}(80)$$

Es wird für die Anwendung dieser Formeln von grösster Wichtigkeit sein, dass das in u^{0^2} resp. u^2 multiplicirte Glied dem für die sphärische Abweichung massgebenden Ausdrucke s proportional ist, und dass auch das von der Linsendicke abhängige, in u^0 resp. u multiplicirte Glied die entsprechenden Werthe ${}^*s^0$ und ${}^*s$ enthält. In der ersten jener Gleichungen beziehen sich die vorkommenden Werthe auf die Vorder-, in der letzteren auf die Hinterfläche. Dass in den der Linsendicke proportionalen Gliedern beide Gattungen von Werthen vertreten sind, ist insofern nicht von Nachtheil, als diese Glieder doch nur correctionsweise zur Anwendung kommen können.

Wir vervollständigen nun unsere Bezeichnungen dadurch, dass wir für windschiefe Strahlen o^0 den Krümmungshalbmesser der Objectfläche, ω den der Bildfläche nach der ersten und o den der Bildfläche nach der zweiten Brechung nennen.

Die für die Krümmungshalbmesser abgeleitete Beziehung ergiebt dann, auf die Brechung durch die Vorderfläche bezogen

$$\frac{1}{\omega} = \frac{n}{o^0} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{n}{p^0}\right) - \frac{2}{3}\frac{n-1}{r^0},$$

und wenn wir sie auch auf die Brechung durch die Hinterfläche, aber derart anwenden, als ob die Strahlen den umgekehrten Weg durchliefen, also die Bildfläche nach der zweiten Brechung zur Objectfläche, die nach der ersten Brechung zur eigentlichen Bildfläche würde,

$$-\frac{1}{\omega} = -\frac{n}{o} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\pi} + \frac{n}{p}\right) + \frac{2}{3}\frac{n-1}{r}$$

oder auch

$$\frac{1}{\omega} = \frac{n}{o} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{n}{p}\right) - \frac{2}{3}\frac{n-1}{r}.$$

Eliminiren wir nun ω, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{o} - \frac{1}{o^0} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0}\right) \\ &\text{oder auch} \\ &\frac{1}{o} - \frac{1}{o^0} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{nf} - \frac{2}{3}\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{d}{r^0 r} \end{aligned}\right\} \quad . . \quad (81)$$

und mit Benutzung der Gleichungen (80) und (79)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{o} - \frac{1}{o^0} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{f} + 2\frac{u^0}{nf}\left[\frac{2n+1}{k^0} - \frac{n+1}{r^0} - \frac{n^2}{(n-1)f}\right] + 2u^{0 2}s \\ &\qquad + b + 4u^0\,[{}^*s^0\, e^0 - {}^*s\, e] \\ &\text{oder} \\ &\frac{1}{o} - \frac{1}{o^0} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{f} + 2\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k} - \frac{n+1}{r} + \frac{n^2}{(n-1)f}\right] + 2u^2 s \\ &\qquad + b + 4u\,[{}^*s^0\, e^0 - {}^*s\, e] \\ &\text{wenn unter b der Werth} \\ &b = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{d}{r r^0} + \frac{(n-1)^2}{n^2} f \left(\frac{d}{r r^0}\right)^2 \\ &\quad + \frac{n-1}{n^2}\left[\left(\frac{n+1}{k^0} - \frac{1}{r^0}\right)\frac{e^0}{k^0} - \left(\frac{n+1}{k} - \frac{1}{r}\right)\frac{e}{k}\right]\left(1 + \frac{n-1}{n}\frac{f}{r r^0}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (82)$$

verstanden wird.

γ) Nach der Brechung durch mehrere Linsen mit Berücksichtigung der Dicken und Entfernungen der Linsen.

In der vorstehenden Gestalt sind die Formeln für die Bildkrümmung sehr geeignet, auch auf ein System mehrerer Linsen

übertragen zu werden. In der That wird für jede einzelne Linse der Zusammenhang der Krümmungshalbmesser der Bildflächen vor und nach der Brechung für die die Achse schneidenden Strahlen nach Massgabe der Gleichung (80) aufgestellt werden können. Bei der Addition der sämmtlichen Gleichungen bleiben nur die Krümmungshalbmesser der Object- und der letzten Bildfläche übrig und die damit aufgefundene Abhängigkeit des letzteren vom ersteren kann benutzt werden, um ein Linsensystem herzustellen, welches die in einer zur Achse senkrechten Ebene liegenden leuchtenden Punkte durch die in Rede stehenden Strahlen wieder in einer Ebene von derselben Eigenschaft abbildet.

In der Gesammtgleichung für den Krümmungshalbmesser der Bildfläche, ein beliebiges brechendes System vorausgesetzt, kommen die Grössen u vor und deren Werthe hängen in bekannter Weise von den Achsenschnitten der abbildenden Strahlen ab, derart, dass, wenn wir den ersten Achsenschnitt in der Entfernung $\mathfrak{T}$ vom ersten Hauptpunkte des Gesammtsystems voraussetzen, die sämmtlichen Werthe u, den einzelnen Linsen zugehörig, sich als Functionen von $\mathfrak{T}$ darstellen lassen. Eine unendlich lichtschwache Blende, in der Entfernung $\mathfrak{T}$ vom ersten Hauptpunkte des Gesammtsystems aufgestellt, würde eine Strahlengruppe ausscheiden, welche eine Bildfläche mit dem eben berechneten Krümmungshalbmesser lieferte. Würde die erwähnte Blende aber eine Oeffnung mit endlichem Halbmesser haben, so könnten wir die hindurchgehenden Strahlen uns zerlegt denken in solche Gruppen, die auch wieder in bestimmten Punkten, theils vor, theils hinter der Blende sich in der Achse kreuzen und zu jeder solchen Strahlengruppe würde, allgemein zu reden, auch eine besondere Bildfläche gehören. Um das Zusammenfallen der sämmtlichen zu bewirken, ist es erforderlich, die Scheitel durch Aufhebung der sphärischen Abweichung zur Vereinigung zu bringen, dann den Krümmungshalbmesser der von $\mathfrak{T}$ abhängigen Bildfläche nach $\mathfrak{T}$ zu differenziren und die sämmtlichen Differentialquotienten der Null gleich zu machen.

Dass durch Erfüllung dieser Bedingung noch einer anderen wesentlichen Forderung entsprochen wird, möge die nachfolgende Erwägung zeigen.

Von einem neben der Achse liegenden leuchtenden Punkte gehen zwei unmittelbar benachbarte Strahlen aus; sie durchschneiden die Achse in der Entfernung $\mathfrak{T}$ resp. $\mathfrak{T} + \partial\mathfrak{T}$ vom ersten

Hauptpunkte und liefern nach der Brechung im Durchschnitt einen Bildpunkt, dem eine gewisse, in oben angegebener Weise zu berechnende Bildkrümmung zugehört. Betrachten wir drei unmittelbar auf einander folgende Strahlen, so ergiebt der Durchschnitt der beiden ersten und ebenso der Durchschnitt der beiden letzten je einen Bildpunkt mit bestimmter zugehöriger Krümmung des Bildes. Erreichen wir nun, wie oben entwickelt, das Zusammenfallen der beiden Bildflächen, so erreichen wir auch das Zusammenfallen der beiden Bildpunkte, da dieselben jedenfalls auf dem mittleren Strahle, und folglich in dessen Durchschnitt mit der gemeinsamen Bildfläche liegen müssen. Ebenso werden aber auch beliebig viele, demselben leuchtenden Punkte entstammende Strahlen nach der Brechung durch das System nur einen einzigen Durchschnittspunkt ergeben, sobald das Zusammenfallen der sämmtlichen Bildflächen erzielt ist, da wir für je drei aufeinanderfolgende Strahlen dieses nachgewiesen haben. Es ist daher bei zusammenfallenden Bildflächen die Aufhebung der sphärischen Abweichung auch seitwärts von der Achse erreicht. Selbstverständlich ist hier nur von der sphärischen Abweichung erster Ordnung die Rede, da nur diese den betreffenden Rechnungen zu Grunde gelegt wurde.

In derselben Weise kann auch die Abbildung durch windschiefe Strahlen nach der Brechung durch ein beliebiges System in Betracht gezogen werden. Für jede einzelne Linse ist zu dem Ende die Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern der Bildflächen vor und nach der Brechung nach Massgabe der Gleichungen (81) oder (82) zu ermitteln. Addiren wir alle unter Zugrundelegung von (81) aufgestellten Gleichungen, so erhalten wir, wenn o^0 der Krümmungshalbmesser der Object-, O der der letzten Bildfläche ist

$$\frac{1}{O} - \frac{1}{o^0} = {}^1/_3 \Sigma \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0}\right) + {}^2/_3 \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0}\right),$$

in welcher Gleichung die Summationen auf alle einzelnen Linsen zu erstrecken sind. Unter der Voraussetzung, dass für die die Achse schneidenden Strahlen die Bildkrümmung schon aufgehoben sei, also für jene dem ebenen Objecte ein ebenes Bild entspreche, ist

$${}^1/_3 \Sigma \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0}\right) = 0$$

und folglich

$$\frac{1}{O} - \frac{1}{o^0} = {}^2/_3 \Sigma \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0}\right).$$

Dieser Ausdruck zeigt mit dem von Petzval ohne nähere Bezeichnung der abbildenden Strahlen angegebenen eine gewisse Verwandtschaft, ohne indess damit ganz übereinzustimmen; er ist insofern bemerkenswerth, als nun, d. h. nach Erfüllung der oben ausgesprochenen Bedingung, die Bildkrümmung für windschiefe Strahlen nur noch von den Radien der brechenden Flächen, dagegen nicht mehr von den Achsenschnitten der abbildenden Strahlen abhängt. Alle bisher betrachteten Gruppen windschiefer Strahlen und folglich auch alle diejenigen Windschiefen, welche durch eine Blende von endlicher aber nicht beträchtlicher Oeffnung hindurchgehen, liefern danach dieselbe, nach obiger Formel zu berechnende Bildkrümmung. Durch Aufhebung der sphärischen Centralabweichung können die Scheitel und damit jene Bildflächen selbst zum Zusammenfall gebracht werden. Dass dann gleichzeitig die einzelnen Bildpunkte neben der Achse sich decken und somit auch für die windschiefen Strahlen die sphärische Abweichung seitwärts von der Achse aufgehoben ist, bedarf nach den vorhin ausgeführten Bemerkungen keiner weiteren Erläuterung. Die Bildfläche der windschiefen Strahlen wird für ein ebenes Object auch eben, und fällt dann vollständig mit der Bildfläche der die Achse schneidenden Strahlen zusammen, wenn

$$\Sigma \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0}\right) = 0.$$

Diese Bedingung ist theoretisch ausserordentlich einfach, wird sich aber thatsächlich nur in den seltensten Fällen mit den anderen Anforderungen, denen das Linsensystem genügen muss, in Einklang bringen lassen.

Soll ohne Rücksicht auf die in einer Achsenebene verlaufenden Strahlen die Bildkrümmung durch die zur Achse windschiefen untersucht werden, so sind die Gleichungen (82) auf jede Linse in Anwendung zu bringen. Der durch Addition aller in solcher Weise aufgestellten Gleichungen sich ergebende Krümmungshalbmesser der letzten Bildfläche hängt dann von den Werthen u ab, und diese lassen sich, wie auf S. 63, als Functionen von $\mathfrak{T}$ darstellen, wenn wir voraussetzen, dass vor der Brechung die windschiefen Strahlen im Grenzfalle die Achse in der Entfernung $\mathfrak{T}$

vom ersten Hauptpunkte des Gesammtsystems treffen. Es gehört demnach wieder zu jeder durch den Werth $\mathfrak{T}$ charakterisirten Gruppe windschiefer Strahlen eine besondere Bildfläche und das Zusammenfallen aller ist nur zu erreichen durch Annullirung der sämmtlichen Differentialquotienten des Krümmungsradius der Bildfläche nach $\mathfrak{T}$. Es verdient bemerkt zu werden, dass die hierfür sich ergebenden Bedingungsgleichungen mit denjenigen identisch sind, welche für das Zusammenfallen der den nicht windschiefen Strahlen entstammenden Bildflächen gelten. Selbstverständlich ist wohl, dass auch die durch Aufhebung der sphärischen Abweichung in der Achse bedingte Coincidenz der Bildscheitel für das Zusammenfallen der Bildflächen erforderlich ist.

b) Die Treue der Abbildung.

Es hat gar keine Schwierigkeit, einen Apparat herzustellen, welcher in Bezug auf Richtigkeit der Abbildung als Muster gelten kann. Wir haben nur nöthig, die eine Seitenwand einer Camera obscura mit einer unendlich kleinen Oeffnung, die wir uns als Punkt vorstellen wollen, zu versehen, so werden sich in diesem Punkte die sämmtlichen, in die Camera gelangenden Strahlen kreuzen; die Strahlenkegel, ausserhalb und innerhalb, sind zu einander symmetrisch und liefern von parallelen Ebenen durchschnitten zwei vollkommen ähnliche Durchschnittsfiguren. Die in einer Ebene ausserhalb befindlichen Lichtpunkte werden daher in jeder parallelen Ebene innerhalb ihre getreue Abbildung finden. Auch körperliche Gegenstände ausserhalb und ihr auf einer beliebigen Fläche innerhalb aufgefangenes Bild werden, wenn beiderseits die kleine Oeffnung als Augenpunkt angenommen wird, in allen ihren Theilen unter denselben Gesichtswinkeln und also gleich gross erscheinen — das Bild hat eben die Eigenschaft, winkelgetreu zu sein. Dass trotz ihrer Vortrefflichkeit nach dieser Richtung hin die Camera obscura in ihrer einfachsten Form ein sehr mangelhaftes Instrument ist, weil Lichtstärke und Schärfe des Bildes sehr gering, und die eine nur auf Kosten der anderen zu verbessern ist, darf als bekannt vorausgesetzt werden; die obigen Bemerkungen sollen uns auch nur einen Fingerzeig geben für die Beurtheilung der Bildtreue bei zusammengesetzteren optischen Vorrichtungen.

Da verschiedene von den leuchtenden Punkten ausgehende

Gruppen von Strahlen auch, wie früher nachgewiesen, verschiedene Bildpunkte liefern, so wird es erforderlich sein, bei irgend einem Systeme von Linsen derselben Achse durch Anbringung einer Blende (Diaphragma) eine bestimmte Gruppe von Strahlen allein zur Wirksamkeit zu bringen, alle übrigen aber auszuschliessen. Eine solche Blende besteht aus einer, vor, zwischen oder hinter den Linsen, senkrecht zur Achse aufgestellten geschwärzten Scheibe, welche nur eine, die Achse concentrisch umgebende runde Oeffnung besitzt. Sie hat daher, wenn wir vorläufig die Oeffnung als verschwindend klein voraussetzen, die Eigenschaft, nur solchen Strahlen den Durchgang zu gestatten, welche an dem Orte der Blendenöffnung die Achse treffen. Die Beschränkung auf eine solche Strahlengruppe fand schon bei der Bestimmung der Bildkrümmung Statt, und ist um so eher gerechtfertigt, als in der That fast alle optischen Apparate, vor Allem aber diejenigen, deren Bilder in grösserer Ausdehnung benutzt werden, mit Blenden versehen sind.

Vernachlässigen wir nun die sphärische Abweichung, so ist klar, dass die sämmtlichen, in der Blendenöffnung die Achse schneidenden Strahlen nach der Brechung wieder in einem einzigen Punkte die Achse durchschneiden und von hier ausgehend einen Strahlenkegel, wir nennen ihn den austretenden, bilden werden. Allgemein zu reden, haben die Strahlen durch die Brechung eine Ablenkung erlitten; nur die Hauptstrahlen des Systems machen eine Ausnahme. Soll nun aber, wie bei der Camera obscura, behuf der Bildtreue der austretende Strahlenkegel dem einfallenden congruent oder symmetrisch sein, so ist erforderlich und hinreichend, dass die eintretenden Strahlen den ersten Hauptpunkt des Systems treffen, da dann unseren früheren Betrachtungen zufolge die gebrochenen Strahlen vom zweiten Hauptpunkte ausgehend, das System in unveränderter Richtung verlassen.

Die Hauptstrahlen des Systems geben daher, wenn von der sphärischen Abweichung abgesehen wird, eine getreue Abbildung.

Die Spitzen der Strahlenkegel liegen dann in den Hauptpunkten und von diesen aus gesehen erscheinen die entsprechenden Theile von Bild und Object unter gleichen Winkeln.

Um die Hauptstrahlen zu isoliren, kann die Abblendung erfolgen

1. im ersten Hauptpunkte, wenn dieser vor der ersten Linse liegt, oder

2. im zweiten Hauptpunkte, wenn dieser noch hinter der letzten Linse liegt, oder

3. zwischen irgend zwei Linsen des Systems, wenn dort die Achse von den Hauptstrahlen durchschnitten wird. Um für diese Strecke der Achse den Durchschnittspunkt bestimmen zu können, setzen wir voraus, dass die bis dahin durchlaufenen Linsen, als System betrachtet, die Brennweite F und die Hauptpunkte E und E_1, die noch folgenden Linsen die Brennweite Φ und die Hauptpunkte E und E_1, die sämmtlichen Linsen aber die Brennweite $\mathfrak{F}$ und die Hauptpunkte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ haben. Bezeichnen wir dann die Strecke $E_1\mathrm{E}$ mit $\mathfrak{D}$, so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Phi} - \frac{\mathfrak{D}}{F\Phi}$$

$$\mathfrak{E}E = -\frac{\mathfrak{D}F}{\Phi} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_1\mathrm{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F}$$

sein. Nennen wir ferner $\mathfrak{C}$ den in Frage stehenden Punkt, so ergiebt die Brechung durch das erste System von der Brennweite F nach Gleichung (38)

$$\frac{1}{-E_1\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{E}E} - \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{E_1\mathfrak{C}} = \frac{\Phi}{\mathfrak{D}\mathfrak{F}} + \frac{1}{F} = \frac{\Phi}{\mathfrak{D}}\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{\Phi}\right)$$

oder

da dann offenbar

$$\left.\begin{aligned} E_1\mathfrak{C} &= \frac{\mathfrak{D}F}{F+\Phi} \\ \mathfrak{C}\mathrm{E} &= \frac{\mathfrak{D}\Phi}{F+\Phi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

so ist ersichtlich, dass die Strecke vom zweiten Hauptpunkte der ersten Linsengruppe bis zum ersten Hauptpunkte der zweiten Linsengruppe von den Hauptstrahlen im Verhältniss der resp. Brennweiten F und Φ getheilt wird. Zugleich zeigt es sich, dass der Punkt $\mathfrak{C}$ nur dann wirklich zwischen die Linsen fallen, also zur Aufstellung einer Blende sich eignen wird, wenn entweder F und Φ positiv, oder aber — ein Fall, der allerdings in der Wirklichkeit nicht vorkommen dürfte — beide Brennweiten negativ sind.

Der richtigen Aufstellung der Blenden scheint bisher wenig Aufmerksamkeit geschenkt zu sein; es ist dies um so auffallender, als dadurch allein die Richtigkeit der Abbildung bei jedem optischen Apparate zu erzielen ist. Wir werden auch in Zukunft stets voraussetzen, dass die Blende, wie eben erörtert, angebracht sei, und dürfen dann versichert sein, dass die durch die Blendenmitten gehenden Hauptstrahlen ein wenigstens in der Nähe der Achse getreues Bild entwerfen.

Anmerkung. Regierungsrath Dr. Steinheil hat in der Sitzung der mathematisch-physikalischen Classe der bairischen Akademie der Wissenschaften vom 8. Juli 1865 „über die Bedingungen der Erzeugung richtiger dioptrischer Bilder" Folgendes vorgetragen:

„Jede Linsencombination, welche winkelgetreue Bilder zeigen soll, muss zwei Bedingungen erfüllen:

1. muss sie nur einen gemeinschaftlichen Hauptpunkt haben und
2. muss die Combination symmetrisch sein in Bezug auf diesen Hauptpunkt.

Die Erfüllung der ersten Bedingung bewirkt, dass alle Hauptstrahlen, die von den Objecten nach ihren Bildern gehen, in demselben Punkte in der Achse kreuzen, das unendlich lichtschwache Bild derselben folglich winkelgetreu wird.

Die Erfüllung der zweiten Bedingung macht, dass die mit dem Hauptstrahl parallel einfallenden Strahlen, die gleichen Abstand von ihm haben, den Hauptstrahl nach der Brechung in demselben Punkte schneiden."

Was die erste Forderung betrifft, so scheint Steinheil zu viel zu verlangen, denn, dass beide Hauptpunkte zusammenfallen und somit der eintretende und der austretende Strahlenkegel eine gemeinschaftliche Spitze haben, erscheint unwesentlich, vielmehr findet die zur Bildtreue erforderliche Congruenz oder Symmetrie derselben auch bei getrennten Hauptpunkten Statt.

Die zweite Behauptung leuchtet nur unmittelbar ein, wenn Object- und Bildpunkt ebenfalls symmetrisch zum gemeinschaftlichen Hauptpunkte liegen. Der allgemeine Beweis bleibt abzuwarten, dürfte aber auch mehr für die Aufhebung der sphärischen Randabweichung, als für die Bildtreue von Interesse sein.

c. Der Bildwinkel.

Wir haben bisher eine Begrenzung der Linsen, beziehungsweise der Linsenflächen nicht angenommen. In Wirklichkeit ergiebt nun entweder der Durchschnitt der beiden Linsenflächen selbst eine solche Begrenzung und zwar einen Kreis, dessen Mittel-

punkt in der Linsenachse befindlich und dessen Ebene auf der letzteren senkrecht steht, — in diesem Falle würde die Linse scharfe Ränder erhalten, — oder die Linse wird durch eine Cylinderfläche abgeschlossen, welche mit der Linse selbst die Achse gemeinschaftlich hat. In beiden Fällen sind die brechenden Flächen durch gleiche Kreise begrenzt, und den Durchmesser derselben nennen wir die Oeffnung der Linse. Ist der Linsenrand concentrisch durch ihre Fassung bedeckt, so bezeichnen wir den Durchmesser des den Lichtstrahlen zugänglichen Theiles dieser letzteren als freie Oeffnung der Linse.

Setzen wir nun

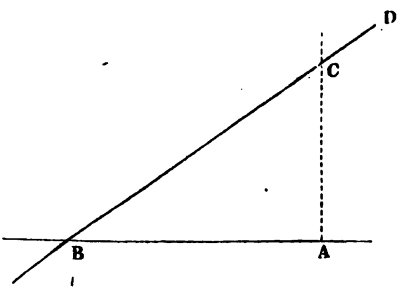
1. eine unendlich kleine Blende voraus, die nur den Hauptstrahlen Durchgang gewährt, so werden, wenn die Linsen von beschränkter Oeffnung sind, nur Strahlen durch das System gelangen und demnach auch nur leuchtende Punkte abgebildet werden können, welche innerhalb eines gewissen Kegels liegen. Die Neigung zweier, in einer Achsenebene liegenden Kanten dieses Kegels bezeichnen wir als Bildwinkel, oder auch, da von ihr die Ausdehnung des Bildes abhängt, als Gesichtsfeld des Systems. Der Bildwinkel wird offenbar bedingt durch die Oeffnung derjenigen Linse, welche den Kegel der Hauptstrahlen auf seinem Wege durch das System am meisten beschränkt. Man könnte nun, um die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Linsenöffnungen und dem Bildwinkel zu entwickeln, entweder für jede einzelne Linse den Winkel der äussersten noch hindurchgelangenden Hauptstrahlen ermitteln, und danach die Entscheidung über den Bildwinkel treffen, oder aber unter Annahme eines bestimmten Kegels von Hauptstrahlen, die Oeffnungen der einzelnen Linsen so bestimmen, dass jener Kegel überall Durchgang finde. Da es für die Praxis, schon der Material- und Arbeitsersparniss wegen, zweckmässig sein wird, die Oeffnungen der Linsen so einzurichten, dass keine einen grösseren Bildwinkel gewähre, als die anderen, so wählen wir den letzteren Weg und haben daher, unter Voraussetzung eines bestimmten Bildwinkels 2ϑ, d. h. unter der Annahme, dass die äussersten Hauptstrahlen unter dem Winkel ϑ gegen die Achse geneigt sind, zu ermitteln, in welcher Entfernung von der Achse die Linsenflächen von jenen Grenzstrahlen getroffen werden. Da diese Schnitthöhen den Formeln (20) und (44) gemäss leicht auf die Schnitthöhen der in den Hauptpunkten der Linsen oder Lin-

sensysteme errichteten Lothe zurückgeführt werden können, so beschränken wir uns auf die Bestimmung dieser letzteren Werthe.

α. Oeffnung der ersten Linse oder des ersten Linsensystems.

Denken wir uns aus dieser ersten Linse, oder dem ersten Systeme einerseits und den sämmtlichen folgenden Linsen andererseits die Gesammtcombination zusammengesetzt, so wird die Entfernung vom ersten Hauptpunkte A (Fig. 5) der ersten Linse oder des ersten Linsensystems bis zum ersten Hauptpunkte B der Gesammtcombination durch $\mathfrak{E}$ zu bezeichnen sein. Der äusserste Hauptstrahl BD trifft dann den Punkt B und schliesst mit der Achse AB den Winkel $DAB = \vartheta$ ein, so dass für die Schnitthöhe AC des in A auf der Achse errichteten Lothes sich die Gleichung ergiebt

Fig. 5.



$$AC = H = \mathfrak{E} . \operatorname{tg} \vartheta.$$

β. Oeffnung der letzten Linse oder des letzten Systems.

Der letzte Hauptpunkt dafür sei A (Fig. 5), der letzte Hauptpunkt der Gesammtcombination B; der austretende Grenzstrahl BD trifft B und ist unter dem Winkel ϑ gegen die Achse BA geneigt, da wir dann $AB = \mathfrak{E}_1$ und die Schnitthöhe AC des in A auf der Achse errichteten Lothes gleich H zu setzen haben, so wird

$$AC = H = \mathfrak{E}_1 \operatorname{tg} \vartheta.$$

γ. Oeffnung einer von den anderen eingeschlossenen Linse.

Es wird diese Linse entweder mit den vorhergehenden, oder mit den noch folgenden Linsen zusammengenommen als ein System betrachtet werden können, für welches die Oeffnung nach den vorhergehenden Fällen zu bestimmen ist. Der so berechnete Werth giebt die Höhe der beiden in den Hauptpunkten errichteten Lothe an und kann nach den Formeln (20) und (44) auf die in Rede stehende Linse und deren Flächen übertragen werden.

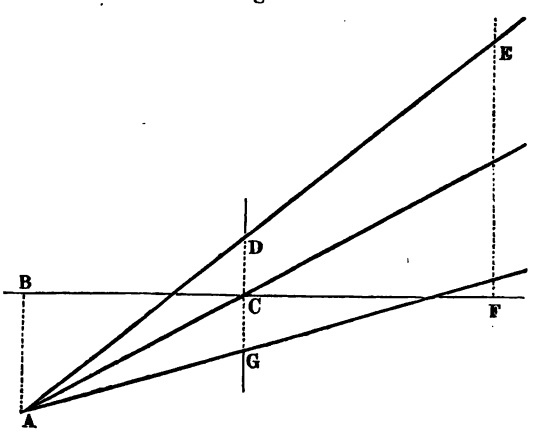
Setzen wir

2. die Blendenöffnung nicht als Punkt, sondern als Kreis vom Radius x voraus, so wird für die, die Mitte der Blende treffenden Hauptstrahlen das bisher Gesagte gelten. Es tritt nun aber von jedem leuchtenden Punkte ein Strahlenkegel, für welchen der Blendenrand die Leitlinie ist, in den Apparat, und betrachten wir einen äussersten Hauptstrahl, so wird mindestens die Hälfte des dazu gehörigen Strahlenkegels von der Blende aufgefangen werden, und das Bild eines solchen, am Rande des Objects gelegenen Punktes, für welchen der Bildwinkel nach den obigen Formeln bestimmt wurde, wird daher kaum halb so viel Strahlen erhalten, als das Bild eines in der Achse befindlichen leuchtenden Punktes, — wir haben daher am Rande des Bildes kaum die halbe Lichtstärke der Mitte.

Es wird nun von Interesse sein, die Oeffnung der Linsen unter der Annahme zu bestimmen, dass alle innerhalb eines Bildwinkels 2ϑ liegenden Lichtpunkte durch ihre vollen Strahlenkegel zur Abbildung gelangen sollen.

Es sei C (Fig. 6) der erste Hauptpunkt der Gesammtcombination, $CD = CG = x$ der Halbmesser der Blendenöffnung, A ein

Fig. 6.



leuchtender Punkt, dessen Hauptstrahl AC unter dem Winkel $ACB = \vartheta$ gegen die Achse BF geneigt ist. AD und AG seien Kanten des von A ausgehenden Strahlenkegels und die erstere treffe das in F, dem ersten Hauptpunkte der ersten Linse

oder des ersten Linsensystems auf der Achse errichtete Loth in E. Ist dann B die Achsenprojection des leuchtenden Punktes, so haben wir $BC = \mathfrak{R}$, $CF = \mathfrak{E}$, $EF = H$ zu setzen.

Die aus der Figur zu ersehende Beziehung

$$EF.BC = AB.CF + CD.BF$$

ergiebt dann

$$H.\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \operatorname{tg} \vartheta . \mathfrak{E} + x (\mathfrak{R} + \mathfrak{E})$$

oder

$$H = \mathfrak{E} \operatorname{tg} \vartheta + x \left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Für die Schnitthöhe des im zweiten Hauptpunkte der letzten Linse oder des letzten Linsensystems errichteten Lothes erhält man unter Einführung der analogen Bezeichnungen

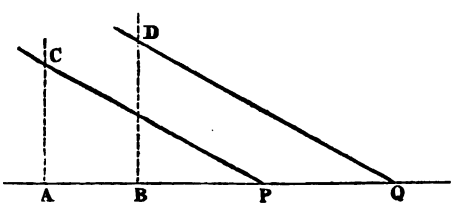
$$\mathrm{H} = \mathfrak{E}_1 \operatorname{tg} \vartheta + x \left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{R}_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Nehmen wir statt der oberen die untere Kegelkante, so ist $-x$ an Stelle von x zu setzen. Bei der Bestimmung der erforderlichen Oeffnung ist aber selbstredend diejenige Kegelkante in Betracht zu ziehen, welche den grössten Werth für H oder H, gleichviel ob dieser positiv oder negativ ausfällt, liefert. Auf die so bestimmten Schnitthöhen der in den Hauptpunkten des Anfangs- und Endsystems auf den Achsen errichteten Lothe lassen sich die entsprechenden Werthe für die einzelnen Linsen oder deren Flächen leicht zurückführen.

d. Vergleichung der Grösse von Bild und Object; Discussion des Bildortes.

Setzen wir in Fig. 7 $AC = \mathfrak{G}$ als ein Object in einer auf der Achse AC senkrechten Ebene, $BD = \mathfrak{G}_1$ als dessen durch ein beliebiges System hervorgebrachtes aber ebenes Bild, P und Q als ersten und zweiten Hauptpunkt des Systems voraus, und bezeichnen AP durch $\mathfrak{R}$, BQ durch $\mathfrak{R}_1$, die Brennweite des Systems durch $\mathfrak{F}$, so gilt die Gleichung

Fig. 7.



$$\frac{1}{\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{F}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

und da der eintretende Hauptstrahl CP dem austretenden DQ parallel sein muss, so wird auch

$$\frac{CA}{DB} = \frac{AP}{BQ}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}}$$

und mit Benutzung der Gleichung (86)

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F} - \mathfrak{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

sein.

Das Bild tritt nach der Brechung aufrecht oder verkehrt auf, je nachdem $\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}}$ positiv oder negativ ist. Dasselbe wird nach der Brechung wirklich zur Erscheinung kommen oder reell sein, wenn $\mathfrak{R}_1$ negativ, für ein positives $\mathfrak{R}_1$ dagegen ist das Bild als ein virtuelles zu bezeichnen.

1. Die Brennweite sei positiv.

Die Gleichungen

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{F}}, \quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F} - \mathfrak{R}}$$

ergeben dann für

$$\mathfrak{R} = +\infty, \quad \mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{F}, \quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = -0.$$

Es erscheint im Brennpunkte, welcher als Vereinigungspunkt der von einem unendlich entfernten Punkte der Achse entsendeten Strahlen diesen Namen erhalten hat, ein reelles, aber verkehrtes Bild.

Nähert sich nun das Object, so entfernt sich das stets reelle und verkehrte Bild und nimmt dabei an Grösse zu.

Es wird für

$$\mathfrak{R} = +2\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{R}_1 = -2\mathfrak{F}, \quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = -1.$$

Das um die doppelte Brennweite vom ersten Hauptpunkte entfernte Object ergiebt ein in derselben Entfernung hinter dem

zweiten Brennpunkte befindliches reelles verkehrtes Bild von gleicher Grösse.

Nähert sich das Object noch mehr, so wird es von dem sich immer weiter entfernenden Bilde an Grösse übertroffen, bis für

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{F},\ \mathfrak{K}_1 = \pm\infty,\ \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \pm\infty$$

sich ergiebt.

Nachdem hier das Bild in unendlicher Ferne unendlich gross geworden, tritt insofern eine Wendung ein, als bei weiter abnehmendem $\mathfrak{K}$ ein virtuelles, aber aufrechtes Bild hervorgeht. Für

$$\mathfrak{K} = 0 \text{ wird } \mathfrak{K}_1 = 0,\ \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = +1$$

und wenn endlich $\mathfrak{K}$ negative Werthe annimmt, so wird stets in geringerer Entfernung von dem Systeme ein verkleinertes aber reelles, aufrechtes Bild erscheinen.

2. Die Brennweite sei negativ.

Setzen wir $-\mathfrak{F}$ für die Brennweite ein, so treten an Stelle der Gleichungen (86) und (87)

$$\frac{1}{\mathfrak{K}_1} = \frac{1}{\mathfrak{K}} + \frac{1}{\mathfrak{F}},\ \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}+\mathfrak{K}}.$$

Die Discussion derselben ergiebt für

$$\mathfrak{K} = +\infty,\quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{F},\quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = +0,$$

also ein virtuelles, aufrechtes Bild. Mit $\mathfrak{K}$ wird auch $\mathfrak{K}_1$ kleiner, das Bild wird grösser, bleibt aber virtuell und aufrecht.

$$\mathfrak{K} = 0 \text{ ergiebt } \mathfrak{K}_1 = 0,\ \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = +1.$$

Wird $\mathfrak{K}$ negativ, so wird das Bild reell, erscheint aber noch aufrecht und übertrifft, in grösserer Entfernung vom Systeme befindlich, als das Object, das letztere an Grösse. Es wird für

$$\mathfrak{K} = -\mathfrak{F},\quad \mathfrak{K}_1 = \infty,\quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \infty$$

und von hier an erhalten wir virtuelle, verkehrte und immer kleinere Bilder, wenn $\mathfrak{K}$ noch weiter abnimmt.

$$\mathfrak{K} = -2\mathfrak{F} \text{ ergiebt } \mathfrak{K}_1 = +2\mathfrak{F},\ \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = -1;$$

Bild und Object sind einander gleich geworden, und endlich wird für

$$\mathfrak{K} = -\infty, \quad \mathfrak{K}_1 = +\mathfrak{F}, \quad \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = -0.$$

Die eben angestellten Betrachtungen rechtfertigen folgende Bemerkungen.

Parallel zur Achse und in deren Nähe einfallende Strahlen werden sich nach der Brechung in einem Punkte, dem Brennpunkte, vereinigen, sie mögen von der einen Seite oder von der anderen Seite her einfallen. Jedes System wird daher zwei, zu den Hauptpunkten symmetrisch liegende Brennpunkte besitzen, deren Entfernung von den Hauptpunkten die von uns schon früher rechnend eingeführte Brennweite ist.

Die Scheitelpunkte der Object- und Bildfläche werden nur in einem einzigen Falle und zwar dann eine zu den Hauptpunkten symmetrische Lage erhalten, wenn beider Entfernung von dem zugehörigen Hauptpunkte der doppelten Brennweite gleich ist. Nur in diesem Falle ist auch die Grösse von Object und Bild übereinstimmend.

e. Vergleichung der Bildgrösse bei verschiedenen Apparaten.

Der Gleichförmigkeit halber setzen wir für beide Apparate, deren Brennweiten $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ sein sollen, unendlich entfernte Objecte von gleicher Grösse voraus. Schliessen dann die von den Objecträndern herrührenden Hauptstrahlen den halben Bildwinkel ϑ mit der Achse ein, so werden auch nach der Brechung die Hauptstrahlen unter diesem Winkel gegen die Achse geneigt sein und den Rand des Bildes begrenzen. Da dieses aber in der Entfernung der Brennweite vom letzten Hauptpunkte erscheint, so haben wir als halbe Bildgrösse für den ersten Apparat

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \operatorname{tg} \vartheta$$

und für den zweiten Apparat

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{F}_1 \operatorname{tg} \vartheta,$$

so dass

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Es verhalten sich daher die Bilder gleicher und unendlich entfernter Objecte wie die Brennweiten der bezüglichen Apparate.

f. Centrale Helligkeit des Bildes.

Die Frage nach der Helligkeit des Bildes führt zu sehr complicirten Untersuchungen, von deren Reproduction wir hier absehen wollen. Wir beschränken uns darauf, die Resultate, welche Beer (Grundriss des photometrischen Calcüls S. 75) erhalten hat, anzugeben und für unsere Zwecke zu verwerthen. Obgleich nur für eine Linse entwickelt, gelten die Formeln doch auch für ein beliebiges System. Beer bezeichnet mit $\mathfrak{J}$ die Leuchtkraft für ein Element des Objects, mit r den Halbmesser des Objects, mit r_1 den des Bildes, mit λ den Winkel, unter welchem der Radius der Blendenöffnung von der Mitte des Objects aus erscheint, und erhält für die centrale Helligkeit des Bildes an und für sich, d. h. ohne Berücksichtigung des Erleuchtungscoëfficienten der das Bild auffangenden Fläche und ohne die Schwächung der Lichtstrahlen durch die Linse in Rechnung zu ziehen, den Werth

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{J} . \sin \lambda^2 \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Nehmen wir nun x als Radius der Blendenöffnung, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ als die Entfernungen von Object und Bild von den resp. Hauptpunkten an, und setzen ein sehr entferntes Object voraus, so wird tg λ und sin λ verwechselt werden können, so dass

$$\sin \lambda = \frac{x}{\mathfrak{R}}.$$

Da nach Früherem auch

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}}$$

so wird

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{J} . \frac{x^2}{\mathfrak{R}_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots (89)$$

und wenn wir ein unendlich entferntes Object, somit $\mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{F}$ voraussetzen

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{J} . \frac{x^2}{\mathfrak{F}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (90)$$

Für Bilder, welche im Brennpunkte auftreten, ist daher die centrale Helligkeit der Grösse der Blendenöffnung direct, dem Quadrate der Brennweite aber umgekehrt proportional.

Das Verhältniss der Helligkeit des Bildes zur Leuchtkraft des unendlich entfernten Objectes giebt uns einen Maassstab für die Leistung des Apparates und soll als Lichtstärke desselben bezeichnet werden. Es ergiebt sich

$$\mathfrak{H} : \mathfrak{J} = \frac{x^2}{\mathfrak{F}^2}.$$

Da von den Lichtstrahlen, welche ein Linsensystem treffen, ein Theil an den Flächen reflectirt, ein anderer Theil von der Glasmasse, welche stets mehr oder weniger undurchsichtig ist, absorbirt wird, so ist zu erwarten, dass die wirkliche Helligkeit eines Bildes stets hinter der berechneten zurückbleibt. Der echte Bruch, mit welchem die letztere multiplicirt werden muss, um die erstere zu erhalten, und welcher auch dem obigen Ausdrucke für die Lichtstärke als Factor hinzuzufügen ist, soll Schwächungscoëfficient heissen, und nach Versuchen von Lambert ist derselbe für den Durchgang durch eine Linse gleich $^5/_6$ zu setzen. Enthält das System m Linsen, so ist als Schwächungscoëfficient $(^5/_6)^m$ anzunehmen; es sind jedoch Doppel- und Tripellinsen mit übereinstimmenden und gekitteten inneren Flächen, da an diesen keine Reflexion Statt findet, für eine einzige Linse zu rechnen. Solche Combinationen werden aus diesem Grunde den aus einzelnen Linsen bestehenden vorzuziehen sein.

g. Farbenabweichung des Bildes.

Wir haben nun die Voraussetzung, dass die leuchtenden Punkte nur homogenes Licht ausstrahlen, zu verlassen und anzunehmen, dass ein, von denselben ausgehender weisser Strahl aus einer Reihe farbiger Strahlen von verschiedener Brechbarkeit besteht. Da jedem farbigen Strahle ein besonderer Brechungsindex zugehört, so wird die Brechung durch eine Linse oder ein System von Linsen für alle Strahlengattungen, allgemein zu reden, besondere Bilder geben, deren Abweichung von einander als chromatische oder Farben-Abweichung des Gesammtbildes bezeichnet wird. Betrachten wir die Sachlage beispielsweise bei der

Brechung durch eine einzige Linse von positiver Brennweite. Die violetten Strahlen sind am stärksten brechbar und liefern daher ein der Linse zunächst liegendes Bild. Das von den rothen Strahlen, denen eine geringere Brechbarkeit eigen ist, entworfene Bild ist von der Linse entfernter, und folglich grösser als das erstere. Wird zwischen diesen Grenzen eine die Lichtstrahlen auffangende Ebene aufgestellt, so erscheint nur das an eben dieser Stelle zu Stande kommende Bild scharf; alle anderen, sich in den resp. farbigen Bildpunkten vereinigenden Strahlenkegel werden aber nicht im Scheitel durchschnitten und erzeugen daher auf der Ebene Lichtkreise, welche die Schärfe des Gesammtbildes beeinträchtigen. In der Achse werden zwar alle farbigen Strahlen ungetrennt sich fortbewegen und ein weisses Bild geben, am Rande aber haben, je nach der Lage der Hauptpunkte, die rothen oder die violetten Strahlen das Uebergewicht; der Rand des Gesammtbildes wird daher farbig gesäumt erscheinen.

Wir haben zunächst die Aenderungen zu untersuchen, welche die Brennweite und die die Lage der Hauptpunkte bestimmenden Grössen erleiden, wenn wir zu Strahlen von anderer Brechbarkeit übergehen.

a. Für eine Linse.

Indem wir uns auf die Bezeichnungen des Art. 2 des ersten Theiles beziehen, erhalten wir für die Brennweite und die Scheitelentfernungen der Hauptpunkte folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{r}\,\frac{n-1}{r^0}\,\frac{d}{n},$$

$$e^0 = -\frac{n-1}{r}\,f\,\frac{d}{n} \text{ und } e = -\frac{n-1}{r^0}\,f\,\frac{d}{n}.$$

Da hiernach

$$\frac{1}{(n-1)\,f} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \frac{(n-1)\,d}{n\,r\,r^0},$$

so wird, wenn wir n als unabhängige Variable, r^0, r und d aber als constant betrachten,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{(n-1)\,f}\right) = \frac{d}{n^2\,r\,r^0}$$

$$\frac{1}{(n-1)}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{f}\right) - \frac{1}{(n-1)^2}\,\frac{1}{f} = \frac{d}{n^2\,r\,r^0}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{(n-1)f} + \frac{(n-1)d}{n^2 r r^0}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{2}{n^3}\,\frac{d}{r r^0}.$$

Da der zweite Differentialquotient und somit auch alle höheren von der Ordnung der Linsendicke klein sind, so dürfen wir uns darauf beschränken

$$\begin{aligned} \Delta\frac{1}{f} &= \frac{1}{(n-1)f}\left[1 + \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\frac{df}{r r^0}\right]\Delta n \\ &= \frac{1}{(n-1)f}\left[1 + \frac{e\,e^0}{df}\right]\Delta n \quad \ldots\ldots \quad (91) \end{aligned}$$

zu setzen, während der vollständig genaue Werth, wie leicht zu entwickeln,

$$\Delta\frac{1}{f} = \frac{1}{(n-1)f}\left[1 + \frac{(n-1)\,(n+\Delta n-1)}{n\,(n+\Delta n)}\,\frac{df}{r r^0}\right]\Delta n$$

sein würde. Es ist ferner

$$e^0 \cdot \frac{1}{(n-1)f} = \frac{1}{n}\,\frac{d}{r}$$

und daher

$$\frac{1}{(n-1)f}\,\frac{\partial e^0}{\partial n} + e^0\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{(n-1)f}\right) = -\,\frac{1}{n^2}\,\frac{d}{r}$$

$$\frac{1}{(n-1)f}\cdot\frac{\partial e^0}{\partial n} = -\,\frac{1}{n^2}\,\frac{d}{r} - e^0\,\frac{d}{n^2 r r^0}$$

oder

$$\frac{\partial e^0}{\partial n} = -\,\frac{e^0}{n} - \frac{e^{0^2}}{n\,r^0};$$

Da das zweite Glied der rechten Seite das Quadrat der Linsendicke enthält, so darf dasselbe in den meisten Fällen vernachlässigt werden, und da auch hier die höheren Differentialquotienten klein von der Ordnung der Linsendicke sind, so ist näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta e^0}{e^0} &= -\,\frac{\Delta n}{n} \\ \text{und ebenso} \qquad \frac{\Delta e}{e} &= -\,\frac{\Delta n}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

zu setzen, während die vollständig genaue Entwickelung

$$\frac{\Delta e^0}{e} = -\frac{\left(1-\frac{e^0}{r^0}\right)\frac{\Delta n}{n}}{1+\left(1-\frac{e^0}{r^0}\right)\frac{\Delta n}{n}}$$

sowie auch

$$\frac{\Delta e}{e} = -\frac{\left(1-\frac{e}{r}\right)\frac{\Delta n}{n}}{1+\left(1-\frac{e}{r}\right)\frac{\Delta n}{n}},$$

und damit den Satz ergeben würde, dass stets genau

$$\frac{\Delta e^0}{e^0} = \frac{\Delta e}{e}$$

sein muss.

β. Für eine Doppellinse.

Wir stützen uns auf die Bezeichnungen und Entwickelungen des Artikels 3 des ersten Theiles und haben daher

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{D}{ff_1},\ E = -\frac{DF}{f_1} \text{ und } E_1 = \frac{DF}{f}$$

zu setzen. Hierin bedeutet bekanntlich D die Strecke vom zweiten Hauptpunkte der Vorder- bis zum ersten Hauptpunkte der Hinterlinse, und da dieser Werth sich von der unveränderlichen Entfernung der inneren Linsenscheitel um $e - e_1$ unterscheidet, so ist

$$\Delta D = \Delta e - \Delta e_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Die obigen Gleichungen ergeben, wenn, wie bisher, die Quadrate von Δn und Δn_1 vernachlässigt werden

$$\Delta\frac{1}{F} = \left(1-\frac{D}{f_1}\right)\Delta\frac{1}{f} + \left(1-\frac{D}{f}\right)\Delta\frac{1}{f_1} - \frac{\Delta D}{ff_1} \quad (94)$$

und, unter Anwendung der Gleichung (91) auf beide Linsen, sowie Einführung des Werthes für ΔD

$$\Delta\frac{1}{F} = \frac{1}{(n-1)f}\left(1-\frac{D}{f_1}\right)\left(1+\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{df}{rr^0}\right)\Delta n$$
$$+\frac{1}{(n_1-1)f_1}\left(1-\frac{D}{f}\right)\left(1+\frac{(n_1-1)^2}{n_1^2}\frac{d_1f_1}{r_1r_1^0}\right)\Delta n_1$$
$$+\frac{e}{ff_1}\frac{\Delta n}{n} - \frac{e_1}{ff_1}\frac{\Delta n_1}{n_1}.$$

Sind die Linsendicken zu vernachlässigen, so wird

$$\Delta \frac{1}{F} = \frac{\Delta n}{(n-1)f} + \frac{\Delta n_1}{(n_1-1)f_1} - \frac{D}{ff_1}\left(\frac{\Delta n}{n-1} + \frac{\Delta n_1}{n_1-1}\right)$$

und wenn auch die Entfernung der Linsen sehr gering ist,

$$\Delta \frac{1}{F} = \frac{\Delta n}{(n-1)f} + \frac{\Delta n_1}{(n_1-1)f_1}$$

zu setzen sein. Ebenso ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\Delta D}{D} - F\Delta\frac{1}{F} + f_1\Delta\frac{1}{f_1} \\ \text{und} \\ \frac{\Delta E_1}{E_1} &= \frac{\Delta D}{D} - F\Delta\frac{1}{F} + f\Delta\frac{1}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (95)$$

Nach den eben entwickelten Formeln kann die Veränderung der Brennweite und die Verschiebung der Hauptpunkte auch dann bestimmt werden, wenn zwei Doppellinsen, oder überhaupt zwei Systeme zu einer Gesammtcombination verbunden werden sollen.

Die vollständige Aufhebung der chromatischen Abweichung wird erreicht sein, wenn der Ort und die Grösse des Bildes von der Brechbarkeit der verschiedenen in Wirksamkeit getretenen Strahlen unabhängig ist. Es wäre zu dem Ende zu verlangen, dass die Brennweite des Systems und die Entfernungen seiner Hauptpunkte von den zugehörigen Flächenscheiteln bei dem Uebergange zu Strahlen anderer Brechbarkeit keine Aenderung erleiden. Die Aufstellung der diese Forderungen ausdrückenden Gleichungen hat nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit; es soll hier aber kurz untersucht werden, in wie weit denselben entsprochen werden kann.

Dass für eine einzige Linse selbst die Unveränderlichkeit der Brennweite nur in einem ganz absonderlichen Falle hergestellt werden kann, liegt auf der Hand; ebenso, dass die Erfüllung derselben Bedingung für zwei und mehrere Linsen keine Schwierigkeit bietet. Es wird daher nur die geforderte unveränderliche Lage der Hauptpunkte einer näheren Prüfung, zunächst für zwei Linsen, zu unterziehen sein und wir haben zu dem Ende

$$\Delta\frac{1}{F} = 0 \quad \Delta e^0 + \Delta E = 0 \quad \text{und} \quad \Delta e_1^0 + \Delta E_1 = 0$$

zu setzen. Vernachlässigen wir die zweiten Potenzen der Linsendicken und nehmen vorerst auch die Entfernung der Linsen als

klein von derselben Ordnung an, so erhalten wir, den Gleichungen (13) und (34) zufolge

$$e - e^0 = \frac{d}{n}, \quad e_1^0 - e_1 = \frac{d_1}{n_1} \text{ und } E_1 - E = D$$

und folglich

$$\Delta e - \Delta e^0 = -\frac{d}{n^2}\Delta n, \quad \Delta e_1^0 - \Delta e_1 = -\frac{d_1}{n_1^2}\Delta n_1$$

und

$$\Delta E_1 - \Delta E = \Delta D.$$

Die Addition dieser drei Gleichungen und der früher entwickelten

$$\Delta D = \Delta e - \Delta e_1$$

lässt nun ersehen, dass

$$(\Delta e_1^0 + \Delta E_1) - (\Delta e^0 + \Delta E) = -\frac{d}{n^2}\Delta n - \frac{d_1}{n_1^2}\Delta n_1$$

wird und dass die beiden in Klammer geschlossenen Werthe nicht gleichzeitig zu Null werden können, denn d und d_1 sind stets positiv und Δn und Δn_1 haben jedenfalls übereinstimmende Vorzeichen. Haben aber die beiden Linsen eine beträchtlichere Entfernung, so wird die Gleichung (34), ohne Vernachlässigung benutzt,

$$\Delta E_1 - \Delta E = \Delta D - \Delta \frac{E E_1}{F}$$

ergeben und durch Addition dieser zu den vorigen Gleichungen

$$\Delta e - \Delta e^0 = -\frac{d}{n^2}\Delta n, \quad \Delta e_1^0 - \Delta e_1 = -\frac{d_1}{n_1^2}\Delta n_1$$

und

$$\Delta D = \Delta e - \Delta e_1$$

erhalten wir

$$(\Delta e_1^0 + \Delta E_1) - (\Delta e^0 + \Delta E) = -\frac{d}{n^2}\Delta n - \frac{d_1}{n_1^2}\Delta n_1 - \Delta \frac{E E_1}{F}.$$

Die Gleichung

$$\frac{E E_1}{F} = -\frac{D^2 F}{f f_1}$$

führt uns aber, da $\Delta \frac{1}{F} = 0$, zu dem Werthe

$$\Delta \frac{E E_1}{F} = -\frac{2DF}{f f_1}\Delta D - D^2 F\left(\frac{1}{f_1}\Delta\frac{1}{f} + \frac{1}{f}\Delta\frac{1}{f_1}\right)$$

$$= +\frac{2DF}{f f_1}\left(e\frac{\Delta n}{n} - e_1\frac{\Delta n_1}{n_1}\right) - \frac{D^2 F}{f f_1}\left(\frac{\Delta n}{n-1} + \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1}\right)$$

und nach dessen Einsetzung zu der Beziehung

$$(\Delta e_1^0 + \Delta E_1) - (\Delta e^0 + \Delta E) = -\frac{d}{n^2}\Delta n - \frac{d_1}{n_1^2}\Delta n_1 - \frac{2DF}{ff_1}\left(e\frac{\Delta n}{n} - e_1\frac{\Delta n_1}{n_1}\right) + \frac{D^2F}{ff_1}\left(\frac{\Delta n}{n-1} + \frac{\Delta n_1}{n_1-1}\right).$$

Uebertrifft nun die Entfernung der Linsen die Dicke derselben beträchtlich, so kann das letzte Glied durch die anderen nicht aufgehoben und auch für sich nicht der Null gleich werden; die in Klammer geschlossenen Grössen der linken Seite lassen sich also nicht gleichzeitig annulliren. Selbst dann, wenn D^2 klein von der Ordnung der Linsendicken wird, kann davon nicht die Rede sein, denn es würde bei positiver Brennweite des ganzen Systems das erste, zweite und letzte Glied der rechten Gleichungsseite dasselbe Vorzeichen besitzen, das dritte Glied aber klein dagegen sein.

Bei Combinationen von mehr als zwei Linsen ist die Möglichkeit, die oben aufgestellten drei Bedingungen erfüllen zu können, nicht zu bezweifeln. In den meisten Fällen der Construction von Linsensystemen aber wird man es nicht für angemessen halten, der Aufhebung der chromatischen Abweichung drei Bedingungsgleichungen und somit auch drei von den disponiblen Elementen des Systems zu widmen. In der That sollte die Unveränderlichkeit der Hauptpunkte nur die vollständige Coincidenz aller derjenigen Bilder bewirken, durch deren Superposition das Gesammtbild hervorgeht; — eine Forderung, welche bei nicht vollständig aufgehobener sphärischer Abweichung doch nur illusorisch und bei Apparaten für photographische Zwecke vollends überflüssig ist. Man wird sich daher fast durchgehends darauf beschränken, entweder die Brennweite, oder, was für Instrumente die nur für Objecte von bestimmter Entfernung verwendet werden, vorzuziehen sein dürfte, die Entfernung des Bildortes vom Scheitel der letzten brechenden Fläche von der Brechbarkeit der Strahlen unabhängig zu machen. Zur Aufstellung der erforderlichen Bedingungsgleichungen reichen die vorstehend entwickelten Formeln aus und nur beispielsweise soll für eine Doppellinse die Rechnung ausgeführt werden. Wir dürfen uns um so eher auf die Erörterung dieses Falles beschränken, als auch bei zusammengesetzteren Combinationen die Gliederung in achromatische Doppellinsen üblich und empfehlenswerth ist.

Nach den uns geläufigen Bezeichnungen ist die Entfernung

des Objectes vom ersten Flächenscheitel gleich $K + E + e^0$ und die des Bildes vom letzten Flächenscheitel gleich $K_1 + E_1 + e_1^0$. Ist nun das Object fest, und soll auch der Bildort unveränderlich sein, so muss

$$\Delta K + \Delta E + \Delta e^0 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta K_1 + \Delta E_1 + \Delta e_1^0 = 0$$

gesetzt werden. Da nun

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K} - \frac{1}{F}$$

und, wenn nur die ersten Potenzen der Verschiebungen berücksichtigt werden,

$$-\frac{\Delta K_1}{K_1^2} = -\frac{\Delta K}{K^2} - \Delta \frac{1}{F}$$

ist, so ergiebt sich die Bedingung

$$\Delta \frac{1}{F} - \frac{\Delta E}{K^2} + \frac{\Delta E_1}{K_1^2} - \frac{\Delta e^0}{K^2} + \frac{\Delta e_1^0}{K_1^2} = 0.$$

Benutzen wir die in Gleichung (95) für ΔE und ΔE_1 entwickelten Werthe, so erhalten wir

$$\Delta \frac{1}{F} - \frac{E}{K^2}\left(\frac{\Delta D}{D} - F\Delta\frac{1}{F} + f_1 \Delta \frac{1}{f_1}\right)$$
$$+ \frac{E_1}{K_1^2}\left(\frac{\Delta D}{D} - F\Delta\frac{1}{F} + f\Delta\frac{1}{f}\right) - \frac{\Delta e^0}{K^2} + \frac{\Delta e_1^0}{K_1^2} = 0$$

und, wenn auch der für $\Delta \frac{1}{F}$ entwickelte Werth aus Gleichung (94) eingesetzt wird,

$$\left(1 + \frac{EF}{K^2} - \frac{E_1 F}{K_1^2}\right)\left[\left(1 - \frac{D}{f_1}\right)\Delta\frac{1}{f} + \left(1 - \frac{D}{f}\right)\Delta\frac{1}{f_1} - \frac{\Delta D}{f f_1}\right]$$
$$+ \frac{E_1 f}{K_1^2}\Delta\frac{1}{f} - \frac{E f_1}{K^2}\Delta\frac{1}{f_1} - \left(\frac{E}{K^2} - \frac{E_1}{K_1^2}\right)\frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta e^0}{K^2} + \frac{\Delta e_1^0}{K_1^2} = 0$$

so wie unter Berücksichtigung der Gleichung (33)

$$\left(1 + \frac{EF}{K^2} - \frac{E_1 F}{K_1^2}\right)\left[\left(1 + \frac{E}{F}\right)\Delta\frac{1}{f} + \left(1 - \frac{E_1}{F}\right)\Delta\frac{1}{f_1} + \frac{\Delta D}{D^2}\cdot\frac{EE_1}{F^2}\right]$$
$$+ \frac{DF}{K_1^2}\Delta\frac{1}{f} + \frac{DF}{K^2}\Delta\frac{1}{f_1} - \left(\frac{E}{K^2} - \frac{E_1}{K_1^2}\right) D\,\frac{\Delta D}{D^2} - \frac{\Delta e^0}{K^2} + \frac{\Delta e_1^0}{K_1^2} = 0.$$

Da nun der Gleichung (34) zufolge

$$D = -E + E_1 + \frac{EE_1}{F}$$

gesetzt werden darf, so wird

$$\left(1+\frac{EF}{K^2}+\frac{E}{F}+\frac{E^2}{K^2}-\frac{EF}{K_1^2}\right)\Delta\frac{1}{f}$$
$$+\left(1-\frac{E_1F}{K_1^2}-\frac{E_1}{F}+\frac{E_1^2}{K_1^2}+\frac{E_1F}{K^2}\right)\Delta\frac{1}{f_1}$$
$$+\left(\frac{EE_1}{F^2}-\left(\frac{E}{K^2}-\frac{E_1}{K_1^2}\right)(E_1-E)\right)\frac{\Delta D}{D^2}-\frac{\Delta e^0}{K^2}+\frac{\Delta e_1^0}{K_1^2}=0,$$

und wenn wir uns der Beziehung

$$\frac{1}{K_1}=\frac{1}{K}-\frac{1}{F}$$

erinnern,

$$\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\Delta\frac{1}{f}+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\Delta\frac{1}{f_1}$$
$$+\left(\frac{E}{K}-\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{\Delta D}{D^2}-\frac{\Delta e^0}{K^2}+\frac{\Delta e_1^0}{K_1^2}=0.$$

Zur weiteren Vereinfachung multipliciren wir die in (34) enthaltene Gleichung

$$\frac{E}{f}+\frac{E_1}{f_1}=0$$

mit $\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)$ und erhalten mit Rücksicht auf (39),

$$\frac{E}{f}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)+\frac{E_1}{f_1}\left(1+\frac{E}{K}\right)=0$$

und unter Benutzung von (41)

$$\left(\frac{E}{K}-\frac{E}{L}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)+\left(\frac{E_1}{L}-\frac{E_1}{K_1}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)=0,$$

eine Gleichung, deren weitere Entwickelung

$$\frac{E}{K}-\frac{E_1}{K_1}=\frac{E}{L}-\frac{E_1}{L}-\frac{EE_1}{LF}=-\frac{D}{L}$$

liefert. Hiernach wird die zuletzt für die Aufhebung der Farbenabweichung erhaltene Gleichung durch

$$\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\Delta\frac{1}{f}+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\Delta\frac{1}{f_1}+\frac{\Delta D}{L^2}-\frac{\Delta e^0}{K^2}+\frac{\Delta e_1^0}{K_1^2}=0$$

zu ersetzen sein. Erinnern wir uns nun der in diesem Artikel für $\Delta\frac{1}{f}$ und ΔD entwickelten Ausdrücke, so ergiebt sich auch

$$\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\frac{1}{f}\left[1+\frac{e e^0}{d f}\right]\frac{\Delta n}{n-1}+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{1}{f_1}\left[1+\frac{e_1 e_1^0}{d_1 f_1}\right]\frac{\Delta n_1}{n_1-1}$$
$$-\frac{\Delta e^0}{K^2}+\frac{\Delta e}{L^2}-\frac{\Delta e_1}{L^2}+\frac{\Delta e_1^0}{K_1^2}=0$$

oder

$$\frac{1}{f}\left[1+\frac{E}{K}+\frac{e e^0}{d}\cdot\frac{1}{f}\right]\frac{\Delta n}{n-1}+\frac{1}{f_1}\left[1+\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1 e_1^0}{d_1}\cdot\frac{1}{f_1}\right]\frac{\Delta n_1}{n_1-1}$$
$$+\frac{e^0}{K^2}\frac{\Delta n}{n}-\frac{e}{L^2}\frac{\Delta n}{n}+\frac{e_1}{L^2}\frac{\Delta n_1}{n_1}-\frac{e_1^0}{K_1^2}\frac{\Delta n_1}{n_1}=0 \quad . \quad . \quad (98)$$

und dieser Gleichung wird in erster Annäherung durch

$$\frac{1}{f}\cdot\frac{\Delta n}{n-1}+\frac{1}{f_1}\cdot\frac{\Delta n_1}{n_1-1}=0,$$

dagegen, wenn nur die Linsendicken vernachlässigt werden dürfen, durch

$$\frac{1}{f}\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{\Delta n}{n-1}+\frac{1}{f_1}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{\Delta n_1}{n_1-1}=0$$

zu genügen sein.

Es ist hier der Ort, diejenigen Thatsachen der Experimental-Physik anzuführen, welche sich auf die Brechbarkeit der Lichtstrahlen beziehen und somit den vorstehenden Untersuchungen über die Wegschaffung der Farbenabweichung zu Grunde zu legen sind. Berücksichtigen wir, dass die den Linsendicken proportionalen Glieder von den anderen an Grösse beträchtlich übertroffen und dass somit die ersteren nur correctionsweise in Rechnung zu bringen sein werden, so hängt die Mitwirkung einer Linse zur Aufhebung der Farbenabweichung von dem Werthe $\frac{\Delta n}{n-1}$, dem sogenannten Zerstreuungsexponenten der verwendeten Glasmasse, ab, und nur wenn das Verhältniss

$$\frac{\Delta n}{n-1}:\frac{\Delta n_1}{n_1-1}:\frac{\Delta n_2}{n_2-1}\ \text{etc.}$$

bekannt ist, wird es gelingen, das Bild derjenigen Strahlen, für welche n, n_1, n_2 etc. die Brechungsexponenten in den einzelnen Linsen sind, zum Zusammenfall zu bringen mit dem Bilde derjenigen Strahlen, deren Brechungsexponenten gleich $n+\Delta n$, $n_1+\Delta n_1$, $n_2+\Delta n_2$ etc. Es ist nun eine näher zu erläuternde Thatsache, dass jene Verhältnisse verschieden ausfallen je nach der Brechbarkeit derjenigen Strahlen, deren Bilder zur Vereinigung gebracht werden sollen.

Strahlen von bestimmter Brechbarkeit experimentell scharf zu charakterisiren ist erst mit Hülfe der Fraunhofer'schen Linien des Spectrums möglich geworden. Für das an der Stelle der hervorragendsten derselben fehlende Licht stellen wir die von Fraunhofer (Schumacher, Astronomische Abhandlungen, 2. Heft, Seite 31) gemessenen Brechungsindices für zwei Glassorten in der nachfolgenden Tabelle zusammen. .

Linie	B	C	D	E	F	G	H
Flintglas Nr. 13	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Crownglas Nr. 9	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566

Gehen wir nun immer von dem durch einen Streifen charakterisirten Lichtstrahle zu dem des nächstfolgenden über und berechnen stets $\frac{\Delta n}{n-1}$, so erhalten wir für diese Werthe folgende Tabelle:

Uebergang von	B–C	C–D	D–E	E–F	F–G	G–H
Flintglas Nr. 13	0,003078	0,008504	0,011005	0,009714	0,018550	0,016322
Crownglas Nr. 9 . . .	0,001934	0,005197	0,006454	0,005717	0,010455	0,009064

Sollen diese Glassorten zu einer achromatischen Combination verwendet werden und wir unterscheiden die dem Crownglase zugehörigen Werthe von denen des Flintglases durch Hinzufügung eines Accentes, so ist das Verhältniss $\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1}$ zu berechnen und dafür ergeben sich folgende Werthe

Uebergang von . . .	B–C	C–D	D–E	E–F	F–G	G–H
	1,592	1,636	1,705	1,699	1,774	1,801

Wäre das Verhältniss $\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1}$ stets gleich 1, und somit der Zerstreuungsexponent für alle Glassorten derselbe, so würde die

Aufhebung der chromatischen Abweichung für Linsen geringer Entfernung nur auf Kosten der brechenden Wirkung überhaupt zu erreichen sein. Dass dieses nicht der Fall, hat Dollond zuerst erkannt und demgemäss die ersten achromatischen Linsencombinationen construirt. Würde der Werth $\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1}$ für alle Zusammenstellungen von Strahlen derselbe sein, so liesse sich, wenigstens von diesem Gesichtspunkte aus, der Achromatismus unter Verwendung zweier Glassorten vollständig herstellen. Da uns aber die letzte Tabelle vom Gegentheil überzeugt, so hat man sich darauf zu beschränken, die von zwei Strahlengattungen herrührenden Bilder zur Vereinigung zu bringen. Die dann noch übrig bleibende Farbenabweichung wird als die des secundären Spectrums bezeichnet, und ihre thunlichste Verminderung hängt sehr wesentlich von der Wahl der zu vereinigenden Strahlen ab. Der Vorschlag, die äussersten Strahlen des Spectrums, vielleicht die der Streifen *B* und *G* zu vereinigen, lässt die am wirksamsten mittleren Strahlen zu sehr unberücksichtigt. Er würde für die angeführten Glasmassen zu dem Werthe $\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1} = 1{,}928$ führen. Empfehlenswerther erscheint die Methode Fraunhofer's, welche die verschiedenen Strahlen je nach ihrer Intensität berücksichtigt. In der folgenden Tabelle sind nach den Versuchen Fraunhofer's (a. a. O., Seite 38) die zwischen je zwei benachbarten Streifen des Spectrums enthaltenen Lichtquantitäten zusammengestellt, unter der Voraussetzung, dass die zwischen *D* und *E* enthaltene die Einheit sei.

B—C	C–D	D—E	E–F	F–G	G—H
0,021	0,299	1,000	0,328	0,185	0,035

Es wird danach

$$\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1}$$

$$= \frac{1{,}592 \cdot 0{,}021 + 1{,}636 \cdot 0{,}299 + 1{,}705 \cdot 1{,}000 + 1{,}699 \cdot 0{,}328 + 1{,}774 \cdot 0{,}185 + 1{,}801 \cdot 0{,}035}{0{,}021 + 0{,}299 + 1{,}000 + 0{,}328 + 0{,}185 + 0{,}035}$$

$$= 1{,}700$$

Der anderweitigen Berechnung des Systems, in Bezug auf Brennweite, sphärische Abweichung, Bildkrümmung etc. sind selbst-

verständlich die Brechungsindices derjenigen Strahlen zu Grunde zu legen, deren Wirksamkeit am grössten ist. Denken wir uns zu dem Ende die Lichtquantität zwischen D und E nach dem Verhältnisse 0,614 : 0,386 getheilt, so wird die Lichtquantität auf beiden Seiten dieser Theilungslinie dieselbe sein. Da aber die Fraunhofer'sche Intensitätscurve des Spectrums unschwer ersehen lässt, dass diese Theilungslinie nahe die Mitte zwischen D und E treffen würde, so ist die Wahl des arithmetischen Mittels der für D und E geltenden Brechungsindices zu empfehlen.

Unter Verwendung von drei und mehr wesentlich verschiedenen Glassorten würde man die Vereinigung von ebenso vielen Strahlengattungen bewirken und dadurch das secundäre Farbenspectrum weiter vermindern können. Wie dann für je zwei Strahlengattungen das Verhältniss $\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1} : \frac{\Delta n_2}{n_2-1}$ etc. zu ermitteln und in die früher aufgestellten Bedingungsgleichungen einzuführen ist, ergiebt sich von selbst. Es resultirt danach immer eine Bedingungsgleichung für die Brennweiten weniger, als Strahlengattungen vereinigt werden sollen.

Die obigen Vorschriften bedürfen einer Modification für den Fall, dass das System den Zwecken der Photographie dienen soll. Die chemisch wirksamen Strahlen, deren Bild aufgefangen und fixirt werden soll, liegen, wie eine Photographie des Spectrums zeigt, in grösster Intensität im Ultraviolett zwischen den Streifen G und H und um dieselben möglichst zu vereinigen, müsste, unter Verwendung der angeführten Glassorten, wenigstens

$$\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1} = 1{,}801$$

gesetzt werden. Dass die chemisch wirksamen Strahlen von bemerkenswerther Intensität nahe beisammen liegen, könnte sehr vortheilhaft zu ihrer ziemlich vollständigen Vereinigung benutzt werden, wenn nicht eine andere Rücksicht ein abweichendes Verfahren geböte. An der Stelle der chemisch wirkenden Strahlen würden nur die violetten Strahlen ein sehr lichtschwaches sichtbares Bild geben, während die bei weitem hellsten Strahlen allgemein zu reden sich an einer anderen Stelle vereinigen werden. Da nun aber zuerst das sichtbare Bild aufgesucht und dann an dem Orte desselben die präparirte Platte zum Auffangen des Bildes der chemisch wirkenden Strahlen aufgestellt wird, so ist das möglichst vollständige Zusammenfallen beider zu fordern. Für

unendlich entfernte Objecte darf man daher von einem optischen und einem chemischen Focus sprechen und die Coincidenz derselben verlangen, wogegen der Sprachgebrauch, der den Abstand beider Vereinigungspunkte als „chemischen Focus" bezeichnet, entschieden verwerflich ist. Nehmen wir als optisch wirksamste Strahlen die in der Mitte zwischen D und E, also mit den Brechungsindices 1,638530 und 1,531296, als chemisch wirksamste diejenigen mitten zwischen G und H, also mit den Brechungsindices 1,665673 und 1,544111 an, so ergiebt sich für den Uebergang von ersteren zu letzteren

$$\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1} = 1{,}731.$$

Da in diesem Falle auf das Bild der chemisch wirkenden Strahlen das meiste Gewicht zu legen ist — das der sichtbaren Strahlen dient in der That nur zur Aufsuchung des Bildortes —, so erscheint es auch geboten, der Berechnung der anderweitigen Bildeigenschaften die Indices der chemisch wirkenden Strahlen zu Grunde zu legen; geht man aber von diesen aus und verlangt, dass die wirksamsten sichtbaren Strahlen denselben Vereinigungspunkt ergeben, so wird

$$\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1-1} = \frac{-\,0{,}027143}{0{,}665673} : \frac{-\,0{,}012815}{0{,}544111} = 1{,}762$$

zu setzen sein. Immerhin aber erscheint die Nothwendigkeit, den optischen und chemischen Brennpunkt zu vereinigen, als ein Uebelstand, da damit die Möglichkeit verloren geht, die Dispersion im chemischen Bilde selbst aufzuheben.

3. Abbildung eines beliebig im Raume vertheilten Complexes von leuchtenden Punkten.

Denkt man sich durch das gegebene Punktsystem eine Reihe stetig aufeinander folgender Ebenen senkrecht zur optischen Achse, oder auch, wenn man lieber will, eine Reihe von Rotationsflächen gelegt, welche mit dem optischen Systeme die Achse gemeinschaftlich haben, so werden die in irgend einer dieser Flächen befindlichen leuchtenden Punkte wieder in einer Rotationsfläche abgebildet; jeder durch das Object gelegten Fläche entspricht eine Bildfläche und die sämmtlichen letzteren zusammengenommen er-

geben in stetiger Folge das nunmehr körperlich ausgedehnte Gesammtbild. Die vorangegangenen Betrachtungen setzen uns in den Stand, von den Eigenschaften jedes Partialbildes Rechenschaft zu geben. Da die von uns entwickelten Eigenschaften der Hauptstrahlen uns ferner schliessen lassen, dass, von den bezüglichen Hauptpunkten aus gesehen, die einander entsprechenden Theile von Bild und Object unter gleichen Winkeln erscheinen werden und somit die Abbildung durch die Hauptstrahlen winkelgetreu werden wird, so kann in Bezug auf das Gesammtbild nur noch die Untersuchung der Ausdehnung von Interesse sein, welche dasselbe in der Richtung der Achse besitzt.

Das Object sei enthalten zwischen zwei Rotationsflächen, deren Scheitel in den Entfernungen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R} + \Delta\mathfrak{R}$ vom ersten Hauptpunkte des optischen Systems sich befinden, während die Scheitel der zugehörigen, und daher das Bild einschliessenden Bildflächen vom zweiten Hauptpunkte um $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_1 + \Delta\mathfrak{R}_1$ entfernt sein sollen. Nennen wir $\mathfrak{F}$ die Brennweite des Systems, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{F}}, \quad \frac{1}{\mathfrak{R}_1 + \Delta\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R} + \Delta\mathfrak{R}} - \frac{1}{\mathfrak{F}}$$

und daher

$$\frac{\Delta\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_1 + \Delta\mathfrak{R}_1)} = \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}(\mathfrak{R} + \Delta\mathfrak{R})}.$$

Die weitere Entwickelung dieser Gleichung ergiebt

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{R}_1 &= \mathfrak{R}_1^2\,\Delta\mathfrak{R} : [\mathfrak{R}^2 - (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R})\,\Delta\mathfrak{R}] \\ &= \frac{\mathfrak{R}_1^2}{\mathfrak{R}^2}\,\Delta\mathfrak{R} : \left[1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}}\,\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{F}}\right] \\ &= \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{F}}\right)^2 \Delta\mathfrak{R} : \left[1 - \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{F}}\right)\frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{F}}\right].\end{aligned}$$

Es zeigt sich daher, dass das Bild zwischen um so engeren Grenzen eingeschlossen ist, je mehr dasselbe dem Brennpunkte sich nähert, dass aber ein vollständiges Zusammenfallen der Grenzflächen nur dann zu erwarten ist, wenn ein Object von endlicher Achsenausdehnung in unendlicher Entfernung sich befindet. Für Objecte von geringer Achsenausdehnung wird übrigens näherungsweise

$$\Delta\mathfrak{R}_1 = \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{F}}\right)^2 \Delta\mathfrak{R}$$

zu setzen sein.

Bezeichnen wir mit m und $m + \Delta m$ die in den das Bild einschliessenden Flächen stattfindende Linearvergrösserung, so ist nach Art. 2 d dieses Theiles

$$m = \frac{K_1}{K} \qquad m + \Delta m = \frac{K_1 + \Delta K_1}{K + \Delta K}.$$

Da nun aber, wie vorhin entwickelt,

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta K} = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{K_1 + \Delta K_1}{K + \Delta K},$$

so ergiebt sich auch

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta K} = m\,(m + \Delta m),$$

und damit der Satz, dass das Verhältniss der Achsenausdehnung von Bild und Object gleich dem Product der zu Anfang und zu Ende des Bildes erzielten Vergrösserung ist.

Das Bild eines körperlichen Gegenstandes ist selbst wieder körperlich ausgedehnt und kann folglich nicht vollständig auf einer einzigen Ebene oder Fläche aufgefangen werden. Soll dieses aber geschehen, so werden nur die in dieser Fläche befindlichen Bildpunkte mit der ihnen zugehörigen Schärfe daselbst sich abbilden. Die ausserhalb befindlichen Bildpunkte aber sind die Scheitel von Strahlenkegeln, und diese werden im Durchschnitte mit der auffangenden Fläche erleuchtete Kreise — Abweichungskreise ergeben. Je kleiner diese Kreise ausfallen, um so grösser wird nach der Richtung der Achse der Bereich der in der auffangenden Fläche mit einiger Deutlichkeit dargestellten Gegenstände sein, um so mehr „Tiefe des Focus“ schreibt der Sprachgebrauch dem optischen Systeme zu. Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen wollen wir die auffangende Fläche in der Entfernung $\mathfrak{K}_1$ vom zweiten Hauptpunkte aufgestellt und, um $\Delta \mathfrak{K}_1$ davon entfernt, einen Bildpunkt voraussetzen, durch welchen ein Abweichungskreis mit dem Radius r hervorgebracht wird. Nehmen wir ferner an, dass der äusserste austretende Strahl das im zweiten Hauptpunkte auf der Achse errichtete Loth in der Höhe $\mathfrak{H}$ durchschneide, so erhalten wir leicht die Beziehung

$$\frac{r}{\mathfrak{H}} = \frac{\Delta \mathfrak{K}_1}{\mathfrak{K}_1 + \Delta \mathfrak{K}_1},$$

aus welcher sich

$$r = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}_1 + \Delta\mathfrak{R}_1} \Delta\mathfrak{R}_1$$

$$= \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}_1 + \Delta\mathfrak{R}_1} m\,(m + \Delta m)\,\Delta\mathfrak{R}$$

ergiebt. Die „Tiefe des Focus“ lässt sich daher bei vorgeschriebener Vergrösserung nicht etwa durch besondere Werthe der Halbmesser der Linsenflächen, sondern nur durch den Winkel des austretenden Strahlenkegels, d. h. auf Kosten der Helligkeit des Bildes beeinflussen.

DRITTER THEIL.

Nachdem wir in den vorstehenden Betrachtungen die Grundlagen für die Beurtheilung der Eigenschaften eines Linsensystems entwickelt, ist es erforderlich, in verschiedenen Beispielen die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einzelner Systeme hervorzuheben, und zu untersuchen, ob und wie dieselben von den in Rede stehenden Abweichungen frei hergestellt werden können.

1. Die Camera obscura mit einer kleinen Oeffnung ohne Linse.

Dieser einfachste optische Apparat besitzt schon seiner Natur nach viele derjenigen Eigenschaften, welche den complicirteren mühsam und doch nur unvollkommen gewonnen werden können, und nur die Unmöglichkeit, ihn anderen wesentlichen Anforderungen gemäss zu veredlen, setzt seinem Gebrauche enge Schranken.

So liefert die Camera obscura Bilder in jeder beliebigen Vergrösserung, da ein bestimmter Focus nicht vorhanden, das Bild vielmehr in jeder Entfernung von der Oeffnung aufgefangen werden kann. Der Bildwinkel ist gleich 180°, das Gesichtsfeld daher unbeschränkt. Die Abbildung auf jeder beliebigen Fläche aufgefangen ist perspectivisch richtig, sobald das Centrum der Oeffnung als Augenpunkt vorausgesetzt wird. Die chromatische und ebenso die sphärische Abweichung ist nicht vorhanden, da die Lichtstrahlen überhaupt nicht gebrochen werden. Diesen Vorzügen gegenüber muss aber hervorgehoben werden, dass das Bild keine nennenswerthe Schärfe besitzt, da von jedem leuchtenden

Punkte ein Strahlenkegel ausgeht, für welchen der Rand der Oeffnung die Leitlinie ist und dessen Durchschnitt mit der auffangenden Fläche das Bild jenes leuchtenden Punktes liefert. Auch durch Verkleinerung der Oeffnung würde sich die Schärfe nur bis zu einem gewissen Grade vermehren lassen, da bei sehr kleinen Oeffnungen die Beugung des Lichts als neue Quelle der Undeutlichkeit hinzutritt*). Dass die Lichtstärke eine sehr geringe ist und nur durch Vergrösserung der Oeffnung, also auf Kosten der Schärfe vermehrt werden kann, braucht kaum erwähnt zu werden.

2. Eine Linse.

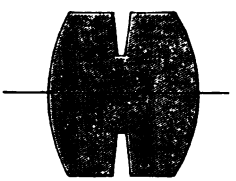
Das vorige Beispiel liess uns erkennen, dass bei der einfachen Camera obscura Schärfe und Lichtstärke viel zu wünschen übrig lassen und sich gegenseitig ausschliessen. Sowie nun ihre Vermehrung nur unter theilweiser Aufopferung der aufgezählten Vorzüge der einfachen Camera obscura zu erreichen ist, so wird überhaupt bei optischen Apparaten jede Verbesserung einen Nachtheil in anderer Beziehung zum Gefolge haben. Ein absolut vollkommener optischer Apparat existirt daher überhaupt nicht und nur die möglichste Ausgleichung der verschiedenen Abweichungen, dem jedesmaligen Zwecke entsprechend, kann unsere Aufgabe sein.

Sobald eine Linse zur Abbildung verwendet wird kann das Bild nicht mehr in jeder beliebigen Entfernung und Grösse aufgefangen werden; vielmehr gelten für den Ort des Bildes und die Vergrösserung die unter 2 d) und e) des vorigen Theiles aufgestellten Sätze, denen gemäss bei vorgeschriebener Vergrösserung die Brennweite f der Linse zu bestimmen ist. Der Bildwinkel ist gleich 180°, das Gesichtsfeld daher unbeschränkt. Der Formel $\mathfrak{H} : \mathfrak{J} = \frac{x^2}{f^2}$ gemäss kann zu der geforderten Lichtstärke der Radius x der Blendenöffnung gefunden werden. Soll eine richtige Abbildung erzielt werden, so muss die Blende entweder im ersten oder im zweiten Hauptpunkte aufgestellt werden; da dieses nur geschehen kann, wenn der betreffende Hauptpunkt ausserhalb der

*) vid. Bericht über dioptrische Untersuchungen von Prof. J. Petzval. Wien 1857.

Linse liegt, so ist zu verlangen, dass $e^0 \geqq 0$ oder $e \leqq 0$ werde, — Bedingungen, welche nur für einen Meniscus oder im Grenzfalle für eine Linse zutreffen, deren eine Fläche plan ist. Der dritte mögliche Weg, die Hauptstrahlen auf ihrem Wege innerhalb der Linse abzublenden, ist neuerdings ebenfalls eingeschlagen worden. In Paris sind Loupen von beträchtlicher Dicke und symmetrischer Form (Fig. 8 stellt den Achsenschnitt dar) angefertigt worden, mit einem in der Mitte befindlichen geschwärzten Einschnitte versehen, welcher als Blendung wirkt. Dass die sogenannte Tiefe des Focus nur durch Verengerung der Blende zu vermehren ist, lässt die im Art. 3 des vorigen Theiles angestellte Betrachtung erkennen.

Fig. 8.



Die Authebung der sphärischen Abweichung in der Achse wird nach Art. 1 a) des vorigen Theiles durch Erfüllung der Gleichung $s = 0$ erzielt, und gestützt auf die im Art. 2 des ersten Theiles für s entwickelten Werthe ergeben sich die Forderungen

$$s = \frac{1}{2\,n\,f}\left[\frac{n+2}{r^{02}} + \frac{2n+1}{r^0}\,\frac{n}{(n-1)\,f} + \frac{n^3}{(n-1)^2 f^2} - \frac{4n+4}{r^0 k^0} - \frac{n}{(n-1)\,f}\,\frac{3n+1}{k^0} + \frac{3n+2}{k^{02}}\right] + \frac{e^0}{k^0}\,{}^*s^0 - \frac{e}{k}\,{}^*s = 0$$

oder

$$s = \frac{1}{2nf}\left[\frac{n+2}{r^2} - \frac{2n+1}{r}\,\frac{n}{(n-1)\,f} + \frac{n^3}{(n-1)^2 f^2} - \frac{4n+4}{rk} + \frac{n}{(n-1)f}\,\frac{3n+1}{k} + \frac{3n+2}{k^2}\right] + \frac{e^0}{k^0}\,{}^*s^0 - \frac{e}{k}\,{}^*s = 0.$$

Soll die sphärische Abweichung in der Abbildung unendlich entfernter Objecte aufgehoben werden, so ist $k^0 = \infty$ zu setzen, und die erste der vorstehenden Gleichungen verlangt, dass unter Vernachlässigung der Glieder von zweiter Dimension

$$\frac{1}{2\,n\,f}\left[\frac{n+2}{r^{02}} + \frac{2n+1}{r^0}\,\frac{n}{(n-1)\,f} + \frac{n^3}{(n-1)^2 f^2}\right] = 0$$

werde. Da nun hiernach

$$\frac{n+2}{r^0} = -\frac{2n+1 \mp \sqrt{-4n+1}}{2}\cdot\frac{n}{(n-1)\,f},$$

und, weil stets $n > 1/4$, r^0 jedenfalls complex werden würde, so ist für eine Linse die Aufhebung der sphärischen Abweichung für unendlich entfernte Objecte nicht möglich. Dieselbe erreicht ihr Minimum, wenn

$$\frac{2n+4}{r^0} + (2n+1)\frac{n}{(n-1)f} = 0$$

oder

$$\frac{r^0}{r} = \frac{2n^2-n-4}{2n^2+n}$$

wird. Für $n = 1{,}5$ würde das Verhältniss

$$\frac{r^0}{r} = -\frac{1}{6}$$

die für eine Linse vortheilhafteste Form liefern. Die Abbildung sehr nahe liegender Objecte (für $n = 1{,}5$ ist die Grenze ungefähr $k^0 = f : 3{,}192$) wird übrigens, wie leicht zu entwickeln, abweichungsfrei zu erzielen sein.

Werden die Hauptstrahlen abgeblendet, so ist $t^0 = t = 0$ und nach Gleichung (76) auch $u^0 = u = 0$. Die Gleichungen (80) ergeben daher

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^0} = \mp\frac{3n+1}{n}\frac{1}{f} + c$$

und ein ebenes Object, durch die die Achse schneidenden Strahlen abgebildet, würde unter Vernachlässigung von c ein Bild mit dem Krümmungshalbmesser

$$p = \frac{nf}{3n+1}$$

liefern. Nur durch Entfernung der Blende von der Linse, also durch Aufopferung der richtigen Zeichnung könnte nach Massgabe der Gleichung (80) das Bild geebnet werden. Die windschiefen Strahlen bilden, Gleichung (82) zufolge, ein ebenes Object in einer Fläche ab, deren Krümmungshalbmesser

$$o = \frac{nf}{n+1}$$

wird.

Soll behuf der Aufhebung der Farbenabweichung eine constante Brennweite hergestellt werden, so ist Gleichung (91) zufolge

$$\Delta\frac{1}{f}=\frac{1}{(n-1)f}\left[1+\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{df}{r^0 r}\right]\Delta n=0$$

oder

$$1+\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{df}{r^0 r}=0$$

zu setzen. Nur eine doppeltconvexe Linse oder ein zerstreuender Meniscus, beide von beträchtlicher Dicke und mit nahezu gleichen Radien könnten dieser Forderung genügen.

3. Zwei Linsen.

Die Brennweite des Systems ist wie im vorigen Falle durch die vorgeschriebene Vergrösserung, die Blendenöffnung durch die Lichtstärke bedingt.

In Betreff der chromatischen und sphärischen Abweichung der Doppellinse brauchen wir nur zu bemerken, dass erstere durch Erfüllung der Gleichung (96), letztere aber durch Annullirung des in Gleichung (50) entwickelten Werthes S aufzuheben ist.

Zur Beurtheilung der Bildkrümmung für die die Achse schneidenden Strahlen gehen wir auf Gleichung (80) zurück und erhalten, wenn wir bezüglich mit p^0, $p=p_1$ und p_1^0 die Krümmungshalbmesser der Bilder für Strahlen vor, zwischen und hinter den beiden Linsen bezeichnen,

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p^0}=\frac{3n+1}{nf}+6\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+6u^2 s$$
$$+c+12u\,[{}^*s^0 e^0-{}^*s\,e]$$

$$\frac{1}{p_1^0}-\frac{1}{p_1}=\frac{3n_1+1}{n_1 f_1}+6\frac{u_1}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]+6u_1^2 s_1$$
$$+c_1+12u_1\,[{}^*s_1 e_1-{}^*s_1^0 e_1^0],$$

sowie durch Addition der vorstehenden Gleichungen, wenn wir der Abkürzung halber

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3n+1}{nf}+\frac{3n_1+1}{n_1 f_1}+c+c_1=A\\
&\frac{6}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+12\left[{}^*s^0 e^0-{}^*s\,e\right]=B\\
&\frac{6}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]+12\left[{}^*s_1 e_1-{}^*s_1^0 e_1^0\right]=B_1
\end{aligned}\right\}(97)$$

setzen,

$$\frac{1}{p_1^0} - \frac{1}{p^0} = A + Bu + B_1 u_1 + 6su^2 + 6s_1 u_1^2 \quad \ldots \quad (98)$$

Zur Bestimmung von u und u_1 setzen wir voraus, dass die abbildenden Strahlen die Achse vor der Brechung in der Entfernung T vom ersten, und nach der Brechung in der Entfernung T_1 vom zweiten Hauptpunkte der Doppellinse durchschneiden, so dass

$$t^0 = T + E, \quad t_1^0 = T_1 + E_1 \quad \ldots \quad (99)$$

und

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - \frac{1}{F}$$

zu setzen ist. Bestimmen wir dann, ähnlich wie bei den einfachen Linsen, die Werthe U und U_1 durch die Gleichungen

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{T} - \frac{1}{K} \quad \text{und} \quad \frac{1}{U_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{K_1} \quad \ldots \quad (100)$$

aus deren Subtraction sich auch wieder

$$U = U_1$$

ergiebt, so ist Gleichung (76) zufolge

$$\begin{aligned}\frac{1}{u^0}\left(1+\frac{E}{T}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right) &= \frac{1}{t^0}\left(1+\frac{E}{T}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right) - \frac{1}{k^0}\left(1+\frac{E}{T}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)\\ &= \frac{1}{T}\left(1+\frac{E}{K}\right) - \frac{1}{K}\left(1+\frac{E}{T}\right)\\ &= \frac{1}{T} - \frac{1}{K},\\ &= \frac{1}{U}\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}u^0 &= U\left(1+\frac{E}{T}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)\\ &= U\left(1+\frac{E}{K}+\frac{E}{U}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)\\ &= U\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 + E\left(1+\frac{E}{K}\right).\end{aligned}$$

Da $u^0 = u$, so wird auch

$$u = U\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 + E\left(1+\frac{E}{K}\right)$$

und, wie aus der analogen Entwickelung hervorgeht,

$$u_1 = U_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 + E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)$$

zu setzen sein.

Der Differentiation des Krümmungshalbmessers ist eigentlich, wie früher erörtert, T als unabhängig Veränderliche zu unterstellen; da aber $U = U_1$ eine Function von T, durch welche sich alle in Frage kommenden Grössen ausdrücken lassen, so darf auch $U = U_1$ als unabhängig Variable benutzt werden. Wir erhalten dann

$$\partial u = \partial U\left(1+\frac{E}{K}\right)^2, \quad \partial^2 u = 0,$$

$$\partial u_1 = \partial U_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2, \quad \partial^2 u_1 = 0;$$

ebenso werden die sämmtlichen höheren Differentiale von u und u_1 gleich Null.

Ist der richtigen Zeichnung halber die Blende im Hauptpunkte aufgestellt, so erhalten wir

$$T = T_1 = 0 \qquad U = U_1 = 0$$

$$u = E\left(1+\frac{E}{K}\right), \quad \partial u = \partial U\left(1+\frac{E}{K}\right)^2, \quad \partial^2 u = 0$$

$$u_1 = E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right), \quad \partial u_1 = \partial U_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2, \quad \partial^2 u_1 = 0$$

und wenn wir unter Berücksichtigung dieser Werthe und der Gleichung (98) die Forderung aufstellen, dass dem ebenen Objecte ein ebenes Bild entspreche, sowie dass die sämmtlichen Derivirten des Krümmungshalbmessers zu Null werden, so ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A + BE\left(1+\frac{E}{K}\right) + B_1 E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right) \\ + 6sE^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 + 6s_1 E_1^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 = 0 \\ B\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 + B_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 \\ + 12sE\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 + 12s_1 E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 = 0 \\ + 12s\left(1+\frac{E}{K}\right)^4 + 12s_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (101)$$

Die letzte dieser Gleichungen stimmt mit der Gleichung $S = 0$ überein; es zeigt sich daher, dass das Zusammenfallen der verschiedenen Bildflächen, oder die Aufhebung der sphärischen Abweichung seitwärts von der Achse, wie vorauszusehen, die Aufhebung der sphärischen Centralabweichung involvirt.

Aus allen drei Gleichungen lässt sich s und s_1 eliminiren und die resultirende Gleichung

$$2A\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)-B\left(1+\frac{E}{K}\right)^2D+B_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2D=0$$

soll an Stelle der ersten gesetzt werden; substituiren wir nun die Werthe von A, B und B_1 aus Gleichung (97) und berücksichtigen dabei die Gleichung (39) (41) und (42), so erhalten wir an Stelle der beiden ersten Gleichungen (101)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3n+1}{3n}\frac{1}{f}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)+\frac{3n_1+1}{3n_1}\frac{1}{f_1}\left(1+\frac{E}{K}\right)+\frac{1}{3}(c+c_1)\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\\
&-\frac{D}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]+\frac{D}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]\\
&-2D\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*s^0e^0-{}^*se]+2D\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]=0\\
&\frac{1}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]+\frac{1}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]\\
&+2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*s^0e^0-{}^*se]+2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]\\
&+2sE\left(1+\frac{E}{K}\right)^3+2s_1E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3=0
\end{aligned}\right\}(10$$

Diese Gleichungen, vereint mit denen der sphärischen und chromatischen Abweichung, sowie der zur Herstellung der vorgeschriebenen Bildgrösse erforderlichen, reichen aus, um die fünf Elemente des Systems, die vier Radien und die Entfernung der Linsen zu bestimmen. Die letztere kann nicht verschwindend klein werden, da sonst die erste der Gleichungen (102) mit der Gleichung der chromatischen Abweichung in Widerspruch gerathen würde; eine ungetrennte achromatische Doppellinse kann daher kein ebenes Bild liefern, wenn die Hauptstrahlen als abbildende Strahlen verwendet werden. Bei anderer Blendenstellung, d. h. auf Kosten der richtigen Zeichnung könnte allerdings dieser Bedingung genügt werden. Wir enthalten uns der weiteren Entwickelung der vorstehenden Gleichungen und bemerken nur, dass

ihnen zuerst annähernd und dann durch allmähliche Correction immer genauer die gesuchten Werthe zu entnehmen sind.

Es müsste nun noch die den windschiefen Strahlen entstammende Bildkrümmung in Berücksichtigung gezogen werden. Diese aber aufzuheben und gleichzeitig den eben aufgestellten Bedingungen zu entsprechen, ist natürlich unmöglich, da über die disponiblen Elemente des Systems schon verfügt wurde. Wollte man auf die Erfüllung einer der früheren Bedingungen verzichten und dafür beide Arten von Bildkrümmung fortschaffen, so wäre den Gleichungen (102) noch hinzuzufügen:

$$\frac{n-1}{nr} - \frac{n-1}{nr^0} + \frac{n_1-1}{n_1 r_1^0} - \frac{n_1-1}{n_1 r_1} = 0$$

oder

$$\frac{1}{nf} + \frac{1}{n_1 f_1} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{d}{r r^0} - \left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2 \frac{d_1}{r_1 r_1^0} = 0,$$

eine Bedingung, welche mit der Gleichung für die Wegschaffung der chromatischen Abweichung im entschiedenen Widerspruche steht, so lange nicht Menisken von sehr beträchtlicher Dicke oder auch Linsen in so grosser Entfernung in Anwendung gebracht werden, dass, ohne die sammelnde Wirkung der Gesammtcombination zu beeinträchtigen, die Sammellinse eine längere Brennweite als die Zerstreuungslinse erhalten kann.

Sehen wir von diesen absonderlichen Fällen ab, so ist noch zu untersuchen, wie die Bildkrümmung fortzuschaffen, wenn an Stelle der die Achse schneidenden Strahlen die zu ihr windschiefen als abbildende angenommen werden. Es ist dies um so wichtiger, als die letzteren überwiegend in der Mehrzahl sich befinden und Gruppen derselben, verschiedenen Werthen von m angehörend, nahezu coincidirende Bildflächen liefern. Wir haben nunmehr statt der Gleichung (80) die Gleichung (82) der vorhin angestellten Betrachtung zu Grunde zu legen und erhalten, wenn bezüglich mit o^0, $o = o_1$ und o_1^0 die Krümmungshalbmesser der Bilder für Strahlen vor, zwischen und hinter den beiden Linsen bezeichnet werden,

$$\frac{1}{o}-\frac{1}{o^0}=\frac{n+1}{nf}+2\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+2u^2s$$
$$+b+4u\,[{}^*s^0e^0-{}^*s\,e]$$

$$\frac{1}{o_1^0}-\frac{1}{o_1}=\frac{n_1+1}{n_1f_1}+2\frac{u_1}{n_1f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]+2u_1^2s_1$$
$$+b_1+4u_1\,[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0],$$

sowie durch Addition der vorstehenden Gleichungen, wenn wir der Abkürzung halber

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n+1}{nf}+\frac{n_1+1}{n_1f_1}+b+b_1=A\\&\frac{2}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+4\,[{}^*s^0e^0-{}^*s\,e]=B\\&\frac{2}{n_1f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]+4\,[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]=B_1\end{aligned}\right\}(103)$$

setzen,

$$\frac{1}{o_1^0}-\frac{1}{o^0}=A+Bu+B_1u_1+2u^2s+2u^2s_1.$$

Soll nun dem ebenen Objecte ein ebenes Bild entsprechen und sollen auch die sämmtlichen Derivirten des Krümmungshalbmessers der Bildfläche zu Null werden, so muss, wie eine der oben durchgeführten ganz ähnliche Betrachtung ersehen lässt, den Gleichungen

$$2A\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)-B\left(1+\frac{E}{K}\right)^2D+B_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2D=0$$

$$B\left(1+\frac{E}{K}\right)^2+B_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2+4sE\left(1+\frac{E}{K}\right)^3+4s_1E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3=0$$

$$4s\left(1+\frac{E}{K}\right)^4+4s_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4=0$$

genügt werden. Die letzte derselben stimmt wieder mit der für die Aufhebung der sphärischen Centralabweichung überein; werden aber in die beiden ersten die Werthe für A, B und B_1 unter Berücksichtigung der Gleichungen (39), (41) und (42) eingesetzt, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n+1}{n}\frac{1}{f}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)+\frac{n_1+1}{n_1}\frac{1}{f_1}\left(1+\frac{E}{K}\right)+(b+b_1)\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\\
&\frac{D}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]+\frac{D}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]\\
&2D\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*s^0e^0-{}^*se]+2D\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]=0\\
&\text{d}\\
&\frac{1}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]+\frac{1}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]\\
&+2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*s^0e^0-{}^*se]+2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]\\
&+2sE\left(1+\frac{E}{K}\right)^3+2s_1E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3=0.
\end{aligned}\right\}(104)$$

Die letzte dieser Gleichungen stimmt mit der letzten Gleichung (102) überein; das Zusammenfallen der verschiedenen Bildflächen unterliegt daher, wie vorauszusehen, für beide Strahlengattungen derselben Bedingung; dagegen ist die Bedingung, von welcher die Krümmung dieser Bildflächen abhängt, für jede Strahlengattung eine besondere.

Die Gleichung (84), auf die Bezeichnungen unserer Doppellinse übertragen, heisst

$$h = E\,\mathrm{tg}\,\vartheta + x\left(1+\frac{E}{K}\right);$$

die freie Linsenöffnung wird daher durch den vorgeschriebenen Bildwinkel und die Blendenöffnung bestimmt und wächst ausserdem mit der Entfernung D der Linsen.

4. Theorie der Doppelobjective.

Wenn wir jetzt dazu schreiten, die Vereinigung zweier Doppellinsen zu einem Systeme näher ins Auge zu fassen, so wird es aus praktischen Gründen sich empfehlen, die einzelnen Doppellin-

sen ungetrennt und auch möglichst selbstständig in der Art herzustellen, dass jede für sich achromatisch und von sphärischer Abweichung erster Ordnung frei sei. Wir bezeichnen, wie früher, die auf das Gesammtsystem bezogenen Werthe durch Buchstaben des deutschen, die der Vorder- und Hinterlinse zugehörigen Werthe aber durch Buchstaben des lateinischen, resp. des griechischen Alphabets, und stellen der besseren Uebersicht halber folgende Beziehungen an dieser Stelle zusammen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Phi} - \frac{\mathfrak{D}}{F\Phi},\quad \mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{\Phi},\quad \mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F},\\
&\mathfrak{E}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) - \mathfrak{E}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_1 - \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{F}} = -\mathfrak{D},\\
&\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{D}{f f_1},\ E = -\frac{DF}{f_1},\ E_1 = \frac{DF}{f},\\
&\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi_1} - \frac{\Delta}{\varphi\varphi_1},\ \mathrm{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\varphi_1},\ \mathrm{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\varphi},
\end{aligned}\right\} \quad (105)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} + \frac{n-1}{r}\frac{n-1}{r^0}\frac{d}{n},\\
&e^0 = -\frac{n-1}{r} f \frac{d}{n},\quad e = -\frac{n-1}{r^0} f \frac{d}{n},\\
&\frac{1}{f_1} = \frac{n_1-1}{r_1^0} - \frac{n_1-1}{r_1} + \frac{n_1-1}{r_1^0}\frac{n_1-1}{r_1}\frac{d_1}{n_1},\\
&e_1 = -\frac{n_1-1}{r_1^0} f_1 \frac{d_1}{n_1},\ e_1^0 = -\frac{n_1-1}{r_1} f_1 \frac{d_1}{n_1},\\
&\frac{1}{\varphi} = \frac{\nu-1}{\rho} - \frac{\nu-1}{\rho^0} + \frac{\nu-1}{\rho}\frac{\nu-1}{\rho^0}\frac{\delta}{\nu},\\
&\varepsilon^0 = -\frac{\nu-1}{\rho}\varphi\frac{\delta}{\nu},\quad \varepsilon = -\frac{\nu-1}{\rho^0}\varphi\frac{\delta}{\nu},\\
&\frac{1}{\varphi_1} = \frac{\nu_1-1}{\rho_1^0} - \frac{\nu_1-1}{\rho_1} + \frac{\nu_1-1}{\rho_1^0}\frac{\nu_1-1}{\rho_1}\frac{\delta_1}{\nu_1},\\
&\varepsilon_1 = -\frac{\nu_1-1}{\rho_1^0}\varphi_1\frac{\delta_1}{\nu_1},\ \varepsilon_1^0 = -\frac{\nu_1-1}{\rho_1}\varphi_1\frac{\delta_1}{\nu_1},
\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} \\
&= \left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{\mathrm{f}} = \left(1+\frac{E}{K}\right)\left(\frac{\mathrm{n}-1}{r} - \frac{\mathrm{n}-1}{r^0}\right) = \frac{\mathrm{n}-1}{R} - \frac{\mathrm{n}-1}{R^0} \\
&= \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{\mathrm{f}_1} = \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left(\frac{\mathrm{n}_1-1}{r_1^0} - \frac{\mathrm{n}_1-1}{r_1}\right) \frac{\mathrm{n}_1-1}{R_1^0} - \frac{\mathrm{n}_1-1}{R^0} \\
&= \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi_1} \\
&= \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\frac{1}{\varphi} = \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\left(\frac{v-1}{\varrho} - \frac{v-1}{\varrho^0}\right) = \frac{v-1}{\mathrm{P}} - \frac{v-1}{\mathrm{P}^0} \\
&= \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\frac{1}{\varphi_1} = \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left(\frac{v_1-1}{\varrho_1^0} - \frac{v_1-1}{\varrho_1}\right) = \frac{v_1-1}{\mathrm{P}_1^0} - \frac{v_1-1}{\mathrm{P}_1} \\
&= \left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{k^0},\ \frac{1}{L} = \left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{k} = \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{k_1},\ \frac{1}{K_1} = \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{k_1^0}, \\
&= \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\frac{1}{\varkappa^0},\ \frac{1}{\mathrm{L}} = \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\frac{1}{\varkappa} = \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\frac{1}{\varkappa_1},\ \frac{1}{\mathrm{K}_1} = \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\frac{1}{\varkappa_1^0}
\end{aligned}\right\} \quad (107)
$$

Wir gehen zunächst unter der Voraussetzung, dass die abbildenden Strahlen die Achse durchschneiden, zur Untersuchung der Bildkrümmung und der damit zusammenhängenden Fragen über und setzen vorläufig voraus, dass die abbildenden Strahlen vor der Brechung in der Entfernung $\mathfrak{T}$ vom ersten, nach der Brechung aber in der Entfernung $\mathfrak{T}_1$ vom zweiten Hauptpunkte des Systems die Achse treffen, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{T}_1} = \frac{1}{\mathfrak{T}} - \frac{1}{\mathfrak{F}}$$

und wenn wir die Grössen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ durch die Gleichungen

$$\frac{1}{\mathfrak{U}} = \frac{1}{\mathfrak{T}} - \frac{1}{\mathfrak{R}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{U}_1} = \frac{1}{\mathfrak{T}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1}$$

bestimmen, so wird wieder

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}.$$

T, T_1, U und U_1 sollen die bekannte Bedeutung für die erste T, T_1, Υ und Υ die entsprechende Bedeutung für die zweite Doppellinse erhalten, so dass wie früher

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{T} - \frac{1}{K},\ \frac{1}{U_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{K_1},\ U_1 = U$$

und ebenso

$$\frac{1}{\Upsilon} = \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{K}}, \quad \frac{1}{\Upsilon_1} = \frac{1}{\mathrm{T}_1} - \frac{1}{\mathrm{K}_1} \text{ und } \Upsilon_1 = \Upsilon$$

zu setzen ist. Berücksichtigen wir dann die evidenten Beziehungen

$$T = \mathfrak{T} + \mathfrak{E} \quad \mathrm{T}_1 = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{E}_1$$
$$K = \mathfrak{K} + \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathrm{K}_1 = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{E}_1$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{U}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) &= \frac{1}{T}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) - \frac{1}{K}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) - \frac{1}{\mathfrak{K}}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}\right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}} - \frac{1}{\mathfrak{K}} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{U}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Upsilon_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{T}_1}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) &= \frac{1}{\mathrm{T}_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{T}_1}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) - \frac{1}{\mathrm{K}_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{T}_1}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) - \frac{1}{\mathfrak{K}_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{T}_1}\right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{T}_1} - \frac{1}{\mathfrak{K}_1} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{U}_1}.\end{aligned}$$

sowie umgekehrt

$$U = \mathfrak{U}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{T}}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) = \mathfrak{U}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{U}}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right),$$

$$\Upsilon_1 = \mathfrak{U}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{T}_1}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) = \mathfrak{U}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{U}_1}\right)\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)$$

und folglich

$$U = U_1 = \mathfrak{U}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2 + \mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)$$

und

$$\Upsilon = \Upsilon_1 = \mathfrak{U}_1 \left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2 + \mathfrak{E}_1 \left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right).$$

Diese den Doppellinsen zugehörigen Werthe auf die einzelnen Linsen zu übertragen, gestatten die im vorigen Artikel entwickelten Gleichungen

$$u^0 = u = U \left(1 + \frac{E}{K}\right)^2 + E \left(1 + \frac{E}{K}\right)$$

$$u_1 = u_1^0 = U_1 \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^2 + E_1 \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)$$

und die entsprechenden für die zweite Doppellinse

$$v^0 = v = \Upsilon \left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2 + \mathrm{E} \left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right) \quad \text{und}$$

$$v_1 = v_1^0 = \Upsilon_1 \left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)^2 + \mathrm{E}_1 \left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right).$$

Der Differentiation des Krümmungshalbmessers ist $\mathfrak{T}$ als unabhängige Variable zu Grunde zu legen; an Stelle davon lassen wir jedoch $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$ treten, eine Function, durch welche sich alle von $\mathfrak{T}$ abhängigen Grössen ausdrücken lassen. Die obigen Gleichungen ergeben dann

$$\partial \mathfrak{U} = \partial \mathfrak{U}_1$$

$$\partial U = \partial U_1 = \partial \mathfrak{U} \left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2, \quad \partial \Upsilon = \partial \Upsilon_1 = \partial \mathfrak{U}_1 \left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2$$

$$\partial u^0 = \partial u = \partial U \left(1 + \frac{E}{K}\right)^2, \quad \partial v^0 = \partial v = \partial \Upsilon \left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2$$

$$\partial u_1 = \partial u_1^0 = \partial U_1 \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^2, \quad \partial v_1 = \partial v_1^0 = \partial \Upsilon_1 \left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)^2,$$

während die höheren Differentiale sämmtlich gleich Null werden. Combiniren wir nun die vorstehenden Beziehungen unter der Voraussetzung, dass die Hauptstrahlen abgeblendet seien und somit

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 = 0, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 = 0,$$

so erhalten wir

$$u^0 = u = \mathfrak{E}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left(1 + \frac{E}{K}\right)^2 + E\left(1 + \frac{E}{K}\right)$$

$$\partial u^0 = \partial u = \partial \mathfrak{U}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1 + \frac{E}{K}\right)^2$$

$$u_1 = u_1^0 = \mathfrak{E}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^2 + E_1\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)$$

$$\partial u_1 = \partial u_1^0 = \partial \mathfrak{U}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)^2$$

$$v^0 = v = \mathfrak{E}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2 + \mathrm{E}\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)$$

$$\partial v^0 = \partial v = \partial \mathfrak{U}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2$$

$$v_1 = v_1^0 = \mathfrak{E}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)^2 + \mathrm{E}_1\left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)$$

$$\partial v_1 = \partial v_1^0 = \partial \mathfrak{U}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1 + \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)^2$$

und für die sämmtlichen höheren Differentiale den Werth Null.

Für die Krümmungshalbmesser der successiven Object- und Bildflächen gelten die Beziehungen

$$\frac{1}{\mathrm{p}} - \frac{1}{\mathrm{p}^0} = \frac{3\mathrm{n}+1}{\mathrm{n\,f}} + 6\,\frac{u}{\mathrm{n\,f}}\left[\frac{2\mathrm{n}+1}{k} - \frac{\mathrm{n}+1}{r} + \frac{\mathrm{n}^2}{(\mathrm{n}-1)\,\mathrm{f}}\right] + 6\,u^2 s + \mathrm{c} + 12\,u\,[{}^*s^0\,\mathrm{e}^0 - {}^*s\,\mathrm{e}]$$

$$\frac{1}{\mathrm{p}_1^0} - \frac{1}{\mathrm{p}_1} = \frac{3\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1\,\mathrm{f}_1} + 6\,\frac{u_1}{\mathrm{n}_1\,\mathrm{f}_1}\left[\frac{2\mathrm{n}_1+1}{k_1} - \frac{\mathrm{n}_1+1}{r_1} - \frac{\mathrm{n}_1^2}{(\mathrm{n}_1-1)\mathrm{f}_1}\right] + 6u_1^2 s_1 + \mathrm{c}_1 + 12\,u_1\,[{}^*s_1\,\mathrm{e}_1 - {}^*s_1^0\,\mathrm{e}_1^0]$$

bei der Brechung durch die erste Doppellinse, und analog

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^0} = \frac{3\nu+1}{\nu\varphi} + 6\,\frac{v}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa} - \frac{\nu+1}{\varrho} + \frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right] + 6\,v^2\sigma + \gamma + 12\,v\,[{}^*\sigma^0\,\varepsilon^0 - {}^*\sigma\,\varepsilon]$$

$$\frac{1}{\pi_1^0} - \frac{1}{\pi_1} = \frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1} + 6\,\frac{v_1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1} - \frac{\nu_1+1}{\varrho_1} - \frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right] + 6v_1^2\sigma_1 + \gamma_1 + 12\,v_1\,[{}^*\sigma_1\,\varepsilon_1 - {}^*\sigma_1^0\,\varepsilon_1{}^0]$$

bei der Brechung durch die zweite Doppellinse. Soll ein ebenes Object durch das Gesammtsystem eben abgebildet werden, und berücksichtigt man, dass

$$p = p_1, \; p_1^0 = \pi^0 \text{ und } \pi = \pi_1,$$

so ist zu verlangen, dass

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi_1^0} - \frac{1}{p^0} = \frac{3n+1}{nf} + \frac{3n_1+1}{n_1 f_1} + \frac{3\nu+1}{\nu\varphi} + \frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1} \\
&\quad + 6\,\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k} - \frac{n+1}{r} + \frac{n^2}{(n-1)f}\right] + 6\,u^2 s \\
&\quad + 6\,\frac{u}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1} - \frac{n_1+1}{r_1} - \frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right] + 6\,u_1^2 s_1 \\
&\quad + 6\,\frac{v}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa} - \frac{\nu+1}{\varrho} + \frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right] + 6\,v^2\sigma \\
&\quad + 6\,\frac{v_1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1} - \frac{\nu_1+1}{\varrho_1} - \frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right] + 6\,v_1^2\sigma_1 \\
&+ c + 12\,u\,[{}^*s^0 e^0 - {}^*s e] + c_1 + 12\,u_1\,[{}^*s_1 e_1 - {}^*s_1^0 e_1^0] \\
&+ \gamma + 12\,v\,[{}^*\sigma^0\varepsilon^0 - {}^*\sigma\varepsilon] + \gamma_1 + 12\,v_1\,[{}^*\sigma_1\varepsilon_1 - {}^*\sigma_1^0\varepsilon_1^0] = 0
\end{aligned}\right\} (108)$$

werde. Wir differenziren, setzen das Differential des Krümmungshalbmessers der Bildfläche gleich Null, um das Zusammenfallen der benachbarten Bildflächen zu erzielen, und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi_1^0} = 6\,\frac{\partial u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k} - \frac{n+1}{r} + \frac{n^2}{(n-1)f}\right] + 12\,u\,\partial u\,s \\
&\quad + 6\,\frac{\partial u_1}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1} - \frac{n_1+1}{r_1} - \frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right] + 12\,u_1\,\partial u_1 s_1 \\
&\quad + 6\,\frac{\partial v}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa} - \frac{\nu+1}{\varrho} + \frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right] + 12\,v\,\partial v\,\sigma \\
&\quad + 6\,\frac{\partial v_1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1} - \frac{\nu_1+1}{\varrho_1} - \frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right] + 12\,v_1\,\partial v_1\,\sigma_1 \\
&\quad + 12\,\partial u\,[{}^*s^0 e^0 - {}^*s e] + 12\,\partial u_1\,[{}^*s_1 e_1 - {}^*s_1^0 e_1^0] \\
&\quad + 12\,\partial v\,[{}^*\sigma^0\varepsilon^0 - {}^*\sigma\varepsilon] + 12\,\partial v_1\,[{}^*\sigma_1\varepsilon_1 - {}^*\sigma_1^0\varepsilon_1^0] = 0
\end{aligned}\right\} (109)$$

Berücksichtigen wir, dass ∂u, ∂u_1, ∂v und ∂v_1 constant sind, differenziren abermals und setzen auch das zweite Differential des Krümmungshalbmessers gleich Null, so ergiebt sich

$$\partial^2 \frac{1}{\pi_1^0} = 12(\partial u)^2 s + 12(\partial u_1)^2 s_1 + 12(\partial v)^2 \sigma + 12(\partial v_1)^2 \sigma_1 = 0 \quad (110)$$

Da die höheren Differentiale des Krümmungshalbmessers selbstredend zu Null werden, so entsprechen die vorstehenden drei Gleichungen vollständig unserer Forderung einer ebenen und mit den benachbarten zusammenfallenden Bildfläche, resp. der Aufhebung der sphärischen Abweichung seitwärts von der Achse.

Die Einsetzung der für ∂u, ∂u_1, ∂v und ∂v_1 entwickelten Werthe in Gleichung (110) ergiebt

$$\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^4\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^4 s+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1\right]$$
$$+\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^4\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^4\sigma+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4\sigma_1\right]=0 \quad . \quad . \quad (111)$$

oder mit Berücksichtigung der im Artikel 4 der ersten Abtheilung entwickelten Formeln

$$\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^4 S+\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^4 \Sigma=\mathfrak{S}=0;$$

das Zusammenfallen der Bildebenen bedingt daher die Aufhebung der sphärischen Centralabweichung. Unser Vorsatz aber, jede Doppellinse für sich von sphärischer Abweichung frei zu machen, erheischt, dass auch einzeln

$$\left.\begin{aligned} S&=\left(1+\frac{E}{K}\right)^4 s+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1=0 \\ \text{und}\quad \Sigma&=\left(1+\frac{E}{K}\right)^4\sigma+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4\sigma_1=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (112)$$

werde, — Gleichungen, deren weitere Entwickelung wir uns noch vorbehalten.

Setzen wir nun auch in Gleichung (108) die für u, u_1, v und v_1 entwickelten Werthe ein, so wird

$$\frac{3n+1}{nf}+\frac{3n_1+1}{n_1f_1}+\frac{3\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+c+c_1+\gamma+\gamma_1$$

$$+6\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\frac{1}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]$$

$$+6\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{1}{n_1f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]$$

$$+6\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\frac{1}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa}-\frac{\nu+1}{\varrho}+\frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right]$$

$$+6\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1}-\frac{\nu_1+1}{\varrho_1}-\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right]$$

$$+6E\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f_1}\right]$$

$$+6E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{n_1f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f}\right]$$

$$+6E\left(1+\frac{E}{K}\right)\frac{1}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa}-\frac{\nu+1}{\varrho}+\frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right]$$

$$+6E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\frac{1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1}-\frac{\nu_1+1}{\varrho_1}-\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right]$$

$$+6\mathfrak{E}^2\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^4 s+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1\right]+6E^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 s$$

$$6\mathfrak{E}_1^2\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^4\sigma+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4\sigma_1\right]+6E^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\sigma$$

$$12\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 s+E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 s_1\right]+6E_1^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 s_1$$

$$12\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3\sigma+E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3\sigma_1\right]+6E_1^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\sigma_1$$

$$2\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^2(*s^0e^0-*se)+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2(*s_1e_1-*s_1^0e_1^0)\right]$$

$$2\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[\left(1+\frac{E}{K}\right)^2(*\sigma^0\varepsilon^0-*\sigma\varepsilon)+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2(*\sigma_1\varepsilon_1-*\sigma_1{}^0\varepsilon_1{}^0)\right]$$

$$12E\left(1+\frac{E}{K}\right)[*s^0e^0-*se]+12E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)[*s_1e_1-*s_1^0e_1^0]$$

$$12E\left(1+\frac{E}{K}\right)[*\sigma^0\varepsilon^0-*\sigma\varepsilon]+12E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)[*\sigma_1\varepsilon_1-*\sigma_1{}^0\varepsilon_1{}^0]=0$$

und gestützt auf die Gleichungen (107) und (112)

$$\frac{3n+1}{nf}+\frac{3n_1+1}{n_1f_1}+\frac{3\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+c+c_1+\gamma+\gamma_1$$
$$+6\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\frac{1}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]$$
$$+6\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\frac{1}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]$$
$$+6\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\frac{1}{\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\nu L}-\frac{\nu+1}{P}+\frac{\nu}{(\nu-1)\varphi}\right]$$
$$+6\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\frac{1}{\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\nu_1L}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1P_1}-\frac{\nu_1}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right]$$
$$+6\frac{E}{f}\left[\frac{9n+5}{6nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)f}\right]$$
$$+6\frac{E_1}{f_1}\left[\frac{9n_1+5}{6n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)f_1}\right]$$
$$+6\frac{E}{\varphi}\left[\frac{9\nu+5}{\nu L}-\frac{\nu+1}{\nu P}+\frac{3\nu^2+2\nu+1}{6\nu(\nu-1)\varphi}\right]$$
$$+6\frac{E_1}{\varphi_1}\left[\frac{9\nu_1+5}{\nu_1L}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1P_1}-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{6\nu_1(\nu_1-1)\varphi_1}\right]$$

$$+12\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left\{\begin{array}{l}E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 s+E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 s_1\\ +\left(1+\frac{E}{K}\right)^2(*s^0e^0-*se)+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2(*s_1e_1-*s_1^0e_1^0)\end{array}\right\}$$

$$+12\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left\{\begin{array}{l}E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3\sigma+E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3\sigma_1\\ +\left(1+\frac{E}{K}\right)^2(*\sigma^0\varepsilon^0-*\sigma\varepsilon)+\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2*\sigma_1\varepsilon_1-*\sigma_1^0\varepsilon_1^0\end{array}\right\}$$

$$+6E\left(1+\frac{E}{K}\right)\left\{E\left(1+\frac{E}{K}\right)s+2(*s^0e^0-*se)\right\}$$
$$+6E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left\{E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)s_1+2(*s_1e_1-*s_1^0e_1^0)\right\}$$
$$+6E\left(1+\frac{E}{K}\right)\left\{E\left(1+\frac{E}{K}\right)\sigma+2(*\sigma^0\varepsilon^0-*\sigma\varepsilon)\right\}$$
$$+6E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left\{E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\sigma_1+2(*\sigma_1\varepsilon_1-*\sigma_1^0\varepsilon_1^0)\right\}=0$$

wenn wir der Abkürzung halber die Bezeichnungen

$$\frac{F}{f},\ a_1 = \frac{F}{f_1},\ \alpha = \frac{\Phi}{\varphi},\ \alpha_1 = \frac{\Phi}{\varphi_1} \text{ (so dass } a + a_1 = 1 \text{ und } \alpha + \alpha_1 = 1) \qquad (113)$$

$$\left.\begin{array}{l}
E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 s + E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 s_1 \\
\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 ({}^*s^0\, e^0 - {}^*s\, e) + \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 ({}^*s_1\, e_1 - {}^*s_1{}^0\, e_1{}^0) \\
\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\left[\left(E + e^0 + E\left(\frac{E}{K}+\frac{e^0}{K}\right)\right){}^*s^0 - \left(E + e + E\left(\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right)\right){}^*s\right] \\
\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\left[\left(E_1+e_1+E_1\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right)\right){}^*s_1 - \left(E_1+e_1{}^0+E_1\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1{}^0}{K_1}\right)\right){}^*s_1^0\right] \\
(E+e^0)\,{}^*S^0 - (E+e)\,{}^*S + (E_1+e_1)\,{}^*S_1 - (E_1+e_1^0)\,{}^*S_1^0 \\
\frac{Ee}{f}\left(1+\frac{E}{K}\right)^2 {}^*s + \frac{E_1 e_1}{f_1}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 {}^*s_1 \\
(E+e^0)\,{}^*S^0 - (E+e)\,{}^*S + (E_1+e_1)\,{}^*S_1 - (E_1+e_1^0)\,{}^*S_1^0 \\
\frac{DF}{ff_1}(e\,{}^*S - e_1\,{}^*S_1),
\end{array}\right\} (114)$$

$$\left.\begin{array}{l}
E\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 \sigma + E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 \sigma_1 \\
\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 ({}^*\sigma^0\, \varepsilon^0 - {}^*s\, \varepsilon) + \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2 ({}^*\sigma_1\, \varepsilon_1 - {}^*\sigma_1^0\, \varepsilon_1^0) \\
(E+\varepsilon^0)\,{}^*\Sigma^0 - (E+\varepsilon)\,{}^*\Sigma + (E_1+\varepsilon_1)\,{}^*\Sigma_1 - (E_1+\varepsilon_1^0)\,{}^*\Sigma_1^0 \\
\frac{\Delta\Phi}{\varphi\varphi_1}(\varepsilon\,{}^*\Sigma - \varepsilon_1\,{}^*\Sigma_1),
\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{S} = E\left(1+\frac{E}{K}\right)\left\{E\left(1+\frac{E}{K}\right)s + 2\,(*s^0\,e^0 - *s\,e)\right\}$$

$$+ E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left\{E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)s_1 + 2\,(*s_1\,e_1 - *s_1^0\,e_1^0)\right\}$$

$$+ \mathrm{E}\left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\left\{\mathrm{E}\left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\sigma + 2\,(*\sigma^0\,\varepsilon^0 - *\sigma\,\varepsilon)\right\}$$

$$+ \mathrm{E}_1\left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\left\{\mathrm{E}_1\left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\sigma_1 + 2\,(*\sigma_1\,\varepsilon_1 - *\sigma_1^0\,\varepsilon_1^0)\right\}$$

$$= E\left\{(E+e^0)\,*S^0 - (E+e)\,*S\right\} : \left(1+\frac{E}{K}\right)$$

$$+ E_1\left\{(E_1+e_1)\,*S_1 - (E_1+e_1^0)\,*S_1^0\right\} : \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)$$

$$- \frac{DF}{ff_1}\left\{E\,e\,*S : \left(1+\frac{E}{K}\right) - E_1\,e_1\,*S_1 : \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\right\}$$

$$+ \mathrm{E}\left\{(\mathrm{E}+\varepsilon^0)\,*\Sigma^0 - (\mathrm{E}+\varepsilon)\,*\Sigma\right\} : \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)$$

$$+ \mathrm{E}_1\left\{(\mathrm{E}_1+\varepsilon_1)\,*\Sigma_1 - (\mathrm{E}_1+\varepsilon_1^0)\,*\Sigma_1^0\right\} : \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)$$

$$- \frac{\Delta\Phi}{\varphi\varphi_1}\left\{\mathrm{E}\,\varepsilon\,*\Sigma : \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right) - \mathrm{E}_1\,\varepsilon_1\,*\Sigma_1 : \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\right\}$$

$$+ E\left\{e^0\,*S^0 - e\,*S\right\} : \left(1+\frac{E}{K}\right)^2 + E_1\left\{e_1\,*S_1 - e_1^0\,*S_1^0\right\} : \left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2$$

$$+ \mathrm{E}\left\{\varepsilon^0\,*\Sigma^0 - \varepsilon\,*\Sigma\right\} : \left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2 + \mathrm{E}_1\left\{\varepsilon_1\,*\Sigma_1 - \varepsilon_1^0\,*\Sigma_1^0\right\} : \left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)^2$$

$$= E\left(1+\frac{E}{K}\right)\left\{\left(E+e^0+E\left(\frac{E}{K}+\frac{e^0}{K}\right)\right)*s^0 - \left(E+e+E\left(\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right)\right.\right.$$

$$+ E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left\{\left(E_1+e_1+E_1\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right)\right)*s_1 - \left(E_1+e_1^0+E_1\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1^0}{K_1}\right)\right.\right.$$

$$+ \mathrm{E}\left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)\left\{\left(\mathrm{E}+\varepsilon^0+\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}+\frac{\varepsilon^0}{\mathrm{K}}\right)\right)*\sigma^0 - \left(\mathrm{E}+\varepsilon+\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}+\frac{\varepsilon}{\mathrm{L}}\right)\right.\right.$$

$$+ \mathrm{E}_1\left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)\left\{\left(\mathrm{E}_1+\varepsilon_1+\mathrm{E}_1\left(\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}+\frac{\varepsilon_1}{\mathrm{L}}\right)\right)*\sigma_1 - \left(\mathrm{E}_1+\varepsilon_1^0+\mathrm{E}_1\left(\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}+\frac{\varepsilon_1^0}{\mathrm{K}_1}\right)\right.\right.$$

$$+ E\left(1+\frac{E}{K}\right)(*s^0\,e^0 - *s\,e) + E_1\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)(*s_1\,e_1 - *s_1^0\,e_1^0)$$

$$+ \mathrm{E}\left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)(*\sigma^0\,\varepsilon_0 - *\sigma\,\varepsilon) + \mathrm{E}_1\left(1+\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}_1}\right)(*\sigma_1\,\varepsilon_1 - *\sigma_1^0\,\varepsilon_1^0)$$

einführen,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3\,\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}f}+\frac{3\,\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1 f_1}+\frac{3\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+\mathrm{c}+\mathrm{c}_1+\gamma+\gamma_1\\
&+6\,\frac{\mathfrak{E}}{F^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}}\right)\left[\left(\frac{2\,\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}\,\mathrm{a}+\frac{2\,\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1}\,\mathrm{a}_1\right)\frac{F}{L}-\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}\,\mathrm{a}\,\frac{F}{R}-\frac{\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1}\,\mathrm{a}_1\,\frac{F}{R_1}+\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\,\mathrm{a}^2-\frac{\mathrm{n}_1}{\mathrm{n}_1-1}\,\mathrm{a}_1^2\right]\\
&+6\,\frac{\mathfrak{E}_1}{\Phi^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{R}_1}\right)\left[\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\,\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\,\alpha_1\right)\frac{\Phi}{\mathrm{L}}-\frac{\nu+1}{\nu}\,\alpha\,\frac{\Phi}{\mathrm{P}}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\,\alpha_1\,\frac{\Phi}{\mathrm{P}_1}+\frac{\nu}{\nu-1}\,\alpha^2-\frac{\nu_1}{\nu_1-1}\,\alpha_1^2\right]\\
&-\frac{D}{\mathrm{f}\mathrm{f}_1}\left[\left(\frac{5}{\mathrm{n}}-\frac{5}{\mathrm{n}_1}\right)\frac{F}{L}-6\,\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}\,\frac{F}{R}+6\,\frac{\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1}\,\frac{F}{R_1}+\frac{3\,\mathrm{n}^2+2\,\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}-1)}\,\mathrm{a}+\frac{3\,\mathrm{n}_1^2+2\,\mathrm{n}_1+1}{\mathrm{n}_1\,(\mathrm{n}_1-1)}\,\mathrm{a}_1\right]\\
&-\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\left(\frac{5}{\nu}-\frac{5}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{\mathrm{L}}-6\,\frac{\nu+1}{\nu}\,\frac{\Phi}{\mathrm{P}}+6\,\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\,\frac{\Phi}{\mathrm{P}_1}+\frac{3\nu^2+2\nu+1}{\nu\,(\nu-1)}\,\alpha+\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{\nu_1\,(\nu_1-1)}\,\alpha_1\right]\\
&+12\,\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}}\right)C+12\,\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{R}_1}\right)\Gamma+6\,\mathfrak{E}=0
\end{aligned}\right\}\quad(115)$$

Die weitere Entwickelung der Gleichung (109) ergiebt unter Einsetzung der für u, u_1, v und v_1 erhaltenen Ausdrücke

$$6\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\frac{1}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]$$

$$+12\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^4 s+12E\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^3 s$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{1}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right.$$

$$+12\mathfrak{E}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4 s_1+12E_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^3 s_1$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2\frac{1}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa}-\frac{\nu+1}{\varrho}+\frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right]$$

$$+12\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^3\left(1+\frac{E}{K}\right)^4\sigma+12E\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^3\sigma$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2\frac{1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\varkappa_1}-\frac{\nu_1+1}{\varrho_1}-\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right.$$

$$+12\mathfrak{E}_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^3\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^4\sigma_1+12E_1\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K}\right)^3\sigma_1$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*s^0e^0-{}^*se]$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*s_1e_1-{}^*s_1^0e_1^0]$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E}{K}\right)^2[{}^*\sigma^0\varepsilon^0-{}^*\sigma\varepsilon]$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)^2[{}^*\sigma_1\varepsilon_1-{}^*\sigma_1^0\varepsilon_1^0]=0$$

oder, mit Benutzung von Gleichung (112),

$$6\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\frac{1}{f}\left[\frac{2n+1}{nL}-\frac{n+1}{nR}+\frac{n}{(n-1)f}\right]$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\frac{1}{f_1}\left[\frac{2n_1+1}{n_1L}-\frac{n_1+1}{n_1R_1}-\frac{n_1}{(n_1-1)f_1}\right]$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\frac{1}{\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\nu L}-\frac{\nu+1}{\nu P}+\frac{\nu}{(\nu-1)\varphi}\right]$$

$$+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\frac{1}{\varphi_1}\left[\frac{2\nu_1+1}{\nu_1 L}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1 P_1}-\frac{\nu_1}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right]$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2 C+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\Gamma=0$$

und demnach

$$6\,\frac{1}{F^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2\left[\left(\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right)\frac{F}{L}-\frac{n+1}{n_1}a\,\frac{F}{R}\right.$$

$$\left.-\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}+\frac{n}{n-1}a^2-\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2\right]$$

$$+6\,\frac{1}{\Phi^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\left[\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{\nu+1}{\nu}\alpha\,\frac{\Phi}{P}\right.$$

$$\left.-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\frac{\Phi}{P_1}+\frac{\nu}{\nu-1}\alpha^2-\frac{\nu_1}{\nu_1-1}\alpha_1^2\right]$$

$$+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)^2 C+12\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)^2\Gamma=0.$$

Um die der ersten und der zweiten Doppellinse zugehörigen Werthe wenigstens in den massgebendsten Gliedern zu trennen, combiniren wir die vorstehende Gleichung mit (115) und erhalten, wenn wir uns der dritten und sechsten der Gleichungen (107) erinnern,

$$\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[\frac{3n+1}{nf}+\frac{3n_1+1}{n_1 f_1}+\frac{3\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+c+c_1+\gamma+\gamma_1\right]$$
$$+6\frac{\mathfrak{D}}{F^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[\frac{n+1}{n}a\frac{F}{R}+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}-\left(\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right)\frac{F}{L}-\frac{n}{n-1}a^2+\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2\right]$$
$$+\frac{D}{ff_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[6\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-6\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{3n^2+2n+1}{n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{n_1(n_1-1)}a_1\right]$$
$$+\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[6\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-6\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\left(\frac{5}{\nu}-\frac{5}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{\nu(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]$$
$$-12\,\mathfrak{D}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)C+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\mathfrak{C}=0$$

und ebenso

$$\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[\frac{3n+1}{nf}+\frac{3n_1+1}{n_1 f_1}+\frac{3\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+c+c_1+\gamma+\gamma_1\right]$$
$$-6\frac{\mathfrak{D}}{\Phi^2}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\left[\frac{\nu+1}{\nu}\alpha\frac{\Phi}{P}+\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\frac{\Phi}{P_1}-\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{\nu}{\nu-1}\alpha^2+\frac{\nu_1}{\nu_1+1}\alpha_1^2\right]$$
$$+\frac{D}{ff_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[6\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-6\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{3n^2+2n+1}{n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{n_1(n_1-1)}a_1\right]$$
$$+\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\left[6\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-6\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\left(\frac{5}{\nu}-\frac{5}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{\nu(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]$$
$$+12\,\mathfrak{D}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)\Gamma+6\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)\mathfrak{C}=0.$$

Zur Abkürzung möge

$$\vartheta = \Phi\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) : F\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) = \frac{1}{F}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right) : \frac{1}{\Phi}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

sein, so dass ϑ das Verhältniss der auf die Brechung durch das ganze System reducirten Brennweiten der Doppellinsen darstellt, dann lassen sich die beiden letztentwickelten Gleichungen ersetzen durch

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{6\mathfrak{D}_\vartheta}\left[\left(\frac{3n+1}{n}a+\frac{3n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{3\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]+\frac{F\Phi}{6\mathfrak{D}_\vartheta}[c+c_1+\gamma+\gamma_1]-2F^2C+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\vartheta}\mathfrak{C}\\
&+\frac{n+1}{n}a\frac{F}{R}+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}-\left(\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right)\frac{F}{L}-\frac{n}{n-1}a^2+\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\vartheta}\cdot\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}a_1\right]\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\vartheta}\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{6\nu(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{6\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0
\end{aligned}\right\} \quad (117)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\vartheta}{6\mathfrak{D}}\left[\left(\frac{3n+1}{n}a+\frac{3n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{3\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]+\frac{F\Phi}{6\mathfrak{D}}\vartheta[c+c_1+\gamma+\gamma_1]+2\Phi^2\Gamma+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\vartheta\mathfrak{C}\\
&-\frac{\nu+1}{\nu}\alpha\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\frac{\Phi}{P_1}+\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)\frac{\Phi}{L}+\frac{\nu}{\nu-1}\alpha^2-\frac{\nu_1}{\nu_1-1}\alpha_1^2\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\cdot\vartheta\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}a_1\right]\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\vartheta\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{6\nu(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{6\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0.
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Der Zusammenhang von $\frac{\Phi}{L}$ und $\frac{F}{L}$ ergiebt sich aus der unschwer herzustellenden Gleichung

$$\frac{1}{K}\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{K}_1}\right)=\frac{1}{K_1}\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{K}}\right)$$

oder

$$\frac{\Phi}{K}=\frac{F}{K}\,\delta,$$

wenn darin

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{L}+\frac{1}{\varphi}\quad\text{und}\quad\frac{1}{K_1}=\frac{1}{L}-\frac{1}{f_1}$$

gesetzt wird. Es resultirt

$$\frac{\Phi}{L}+\alpha=\frac{F}{L}\,\delta-a_1\,\delta\quad\ldots\ldots\quad(119)$$

Den obigen, ein ebenes Bild und die Aufhebung der sphärischen Abweichung seitwärts von der Achse für die die Achse schneidenden Strahlen bedingenden Gleichungen fügen wir hinzu:

um auch durch die zur Achse windschiefen Strahlen ein ebenes Bild zu erhalten

$$\begin{aligned}&\frac{n-1}{nr}-\frac{n-1}{nr^0}+\frac{n_1-1}{n_1r_1^0}-\frac{n_1-1}{n_1r_1}\\&+\frac{\nu-1}{\nu\rho}-\frac{\nu-1}{\nu\rho^0}+\frac{\nu_1-1}{\nu_1\rho_1^0}-\frac{\nu_1-1}{\nu_1\rho_1}=0;\end{aligned}\quad\ldots\quad(120)$$

für die sphärische Centralabweichung der ersten Doppellinse, nach Gleichung (50)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n+2}{n}a\left(\frac{F}{R}\right)^2-\left(\frac{4n+4}{n}a\frac{F}{L}+\frac{2n+1}{n-1}a^2\right)\frac{F}{R}\\&+\frac{n_1+2}{n_1}a_1\left(\frac{F}{R_1}\right)^2-\left(\frac{4n_1+4}{n_1}a_1\frac{F}{L}-\frac{2n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right)\frac{F}{R_1}\\&+\left(\frac{3n+2}{n}a+\frac{3n_1+2}{n_1}a_1\right)\left(\frac{F}{L}\right)^2\\&+\left(\frac{3n+1}{n-1}a^2-\frac{3n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right)\frac{F}{L}+\frac{n^2}{(n-1)^2}a^3+\frac{n_1^2}{(n_1-1}a_1^3\\&+2\left(\frac{E}{K}+\frac{e^0}{K}\right)F^3{*}S^0-2\left(\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right)F^3{*}S\\&+2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right)F^3{*}S_1-2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1^0}{K_1}\right)F^3{*}S_1^0=0;\end{aligned}\right\}\quad(121)$$

für die sphärische Centralabweichung der zweiten Doppellinse, nach Gleichung (50)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\nu+2}{\nu}\,\alpha\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2-\left(\frac{4\nu+4}{\nu}\,\alpha\,\frac{\Phi}{L}+\frac{2\nu+1}{\nu-1}\,\alpha^2\right)\frac{\Phi}{P}\\
&+\frac{\nu_1+2}{\nu_1}\,\alpha_1\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2-\left(\frac{4\nu_1+4}{\nu_1}\,\alpha_1\,\frac{\Phi}{L}-\frac{2\nu_1+1}{\nu_1-1}\,\alpha_1^2\right)\frac{\Phi}{P_1}\\
&+\left(\frac{3\nu+2}{\nu}\,\alpha+\frac{3\nu_1+2}{\nu_1}\,\alpha_1\right)\left(\frac{\Phi}{L}\right)^2\\
&+\left(\frac{3\nu_1+1}{\nu-1}\,\alpha^2-\frac{3\nu_1+1}{\nu_1-1}\,\alpha_1^2\right)\frac{\Phi}{L}+\left(\frac{\nu^2}{(\nu-1)^2}\,\alpha^3+\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)^2}\,\alpha_1^3\right)\\
&+2\left(\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon^0}{K}\right)\Phi^3\,{}^*\Sigma^0-2\left(\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon}{L}\right)\Phi^3\,{}^*\Sigma\\
&+2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1}{L}\right)\Phi^3\,{}^*\Sigma_1-2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1^0}{K_1}\right)\Phi^3\,{}^*\Sigma_1^0=0,
\end{aligned}\right\}(122)$$

für die chromatische Abweichung der ersten Doppellinse, nach Gleichung (96)

$$\left.\begin{aligned}
&a\left[1+\frac{E}{K}+\frac{e^0 e}{d F}\,a\right]\frac{\Delta n}{n-1}+a_1\left[1+\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1 e_1^0}{d_1 F}\,a_1\right]\frac{\Delta n_1}{n_1-1}\\
&\frac{e^0 F}{K^2}\,\frac{\Delta n}{n}-\frac{e F}{L^2}\,\frac{\Delta n}{n}+\frac{e_1 F}{L^2}\,\frac{\Delta n_1}{n_1}-\frac{e_1^0 F}{K_1^2}\,\frac{\Delta n_1}{n_1}=0
\end{aligned}\right\}(123)$$

für die chromatische Abweichung der zweiten Doppellinse, nach Gleichung (96)

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left[1+\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon^0\varepsilon}{\delta\Phi}\,\alpha\right]\frac{\Delta\nu}{\nu-1}+\alpha_1\left[1+\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^0}{\delta_1\Phi}\,\alpha_1\right]\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1-1}\\
&\frac{\varepsilon^0\Phi}{K^2}\,\frac{\Delta\nu}{\nu}-\frac{\varepsilon\Phi}{L^2}\,\frac{\Delta\nu}{\nu}+\frac{\varepsilon_1\Phi}{L^2}\,\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1}-\frac{\varepsilon_1^0\Phi}{K_1^2}\,\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1}=0
\end{aligned}\right\}(124)$$

für die Lichtstärke

$$\mathfrak{H}:\mathfrak{J}=\frac{x^2}{\mathfrak{R}_1^0}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(89)$$

für die Erzielung des Bildwinkels ϑ

$$H=\mathfrak{E}\,\mathrm{tg}\,\vartheta+x\left(1+\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}}\right)\quad\ldots\ldots\quad(84)$$

$$H=\mathfrak{E}_1\,\mathrm{tg}\,\vartheta+x\left(1+\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{R}_1}\right)\quad\ldots\ldots\quad(85)$$

Bedenken wir nun, dass ausser den vorstehenden Gleichungen die durch die Bildgrösse bestimmte Gesammtbrennweite $\mathfrak{F}$ bekannt ist, so haben wir zur Bestimmung der Grössen

$$r^0,\ r,\ r_1,\ r_1^0,\ \mathfrak{D},\ \rho^0,\ \rho,\ \rho_1,\ \rho_1^0,\ x,\ H \text{ und } H,$$

der zwölf Elemente des Systems, elf Bedingungen entwickelt; es zeigt sich daher, dass in Bezug auf eine derselben allgemein zu reden der Willkür Spielraum bleibt. Die Dicken der Einzellinsen und deren Entfernungen wurden als klein vorausgesetzt und dürften demnach zur Erfüllung von Bedingungen kaum geeignet sein.

Wir haben bei der Aufstellung der obigen Formeln uns auf die sphärische Abweichung der ersten Ordnung beschränkt und auch in den Gleichungen der chromatischen Abweichung nur die ersten Potenzen der Linsendicken und Entfernungen berücksichtigt; mit diesen Ausnahmen aber sind die vorstehenden Formeln genau richtig und enthalten die Lösung unserer Aufgabe.

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes erscheint es nicht überflüssig, die Anwendung der vorstehenden Formeln auf einige specielle Fälle zu erläutern.

A. Das Object sei unendlich entfernt. Die zur Achse windschiefen Strahlen sollen ausser Acht gelassen werden. Die inneren Flächen der ersten Doppellinse sollen zusammenfallen. Die freie Oeffnung H der zweiten Doppellinse sei gegeben, die absolut strenge Einhaltung dieses Werthes aber nicht erforderlich.

Der Voraussetzung gemäss ist

$$\mathfrak{K} = \infty \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{F}$$
$$\frac{F}{L} = \frac{F}{K} - \frac{F}{f} = -a$$

und nach Gleichung (119)

$$\frac{\Phi}{L} = -\alpha - (a + a_1)\,\delta = -(\alpha + \delta).$$

Da die inneren Flächen der ersten Doppellinse zusammenfallen sollen, so ist

$$D = e - e_1;$$

die Gleichheit von r und r_1 bedingt auch die Uebereinstimmung von R und R_1. Es ist nämlich

$$\frac{E}{f} + \frac{E_1}{f_1} = 0,$$

folglich, wenn wir mit $\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)$ multipliciren,

$$\frac{E}{f}\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right) + \frac{E_1}{f_1}\left(1 + \frac{E}{K}\right) = 0$$

und bei weiterer Entwickelung

$$\left(\frac{E}{K} - \frac{E}{L}\right)\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right) + \left(\frac{E_1}{L} - \frac{E_1}{K_1}\right)\left(1 + \frac{E}{K}\right) = 0$$

$$\frac{E}{K} - \frac{E_1}{K_1} + \frac{1}{L}\left(E_1 - E + \frac{EE_1}{K} - \frac{EE_1}{K_1}\right) = 0$$

$$\frac{E}{K} - \frac{E_1}{K_1} + \frac{D}{L} = 0$$

$$1 + \frac{E}{K} + \frac{e}{L} = 1 + \frac{E_1}{K_1} + \frac{e_1}{L}$$

$$\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{e}{k}\right) = \left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left(1 + \frac{e_1}{k_1}\right)$$

$$\frac{1}{r}\left(1 + \frac{E}{K}\right)\left(1 + \frac{e}{k}\right) = \frac{1}{r_1}\left(1 + \frac{E_1}{K_1}\right)\left(1 + \frac{e_1}{k_1}\right)$$

oder

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}.$$

Es sollen nun die Gleichungen in der Reihenfolge, in welcher sie zur Auflösung benutzt, hier aufgeführt werden.

$\mathfrak{F}$ wird der Bildgrösse gemäss bestimmt;

$$x = \mathfrak{F}\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{J}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F} = \frac{H - x}{\operatorname{tg}\vartheta - x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

$$\left.\begin{aligned} &a\left[1 + \frac{E}{K} + \frac{e^0 e}{dF}a\right]\frac{\Delta n}{n-1} + a_1\left[1 + \frac{E_1}{K_1} + \frac{e_1 e_1^0}{d_1 F}a_1\right]\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} \\ &+ \frac{e^0 F}{K^2}\frac{\Delta n}{n} - \frac{eF}{L^2}\frac{\Delta n}{n} + \frac{e_1 F}{L^2}\frac{\Delta n_1}{n_1} - \frac{e_1^0 F}{K_1^2}\frac{\Delta n_1}{n_1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\left[1+\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon^0\varepsilon}{\delta\Phi}\alpha\right]\frac{\Delta\nu}{\nu-1}+\alpha_1\left[1+\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^0}{\delta_1\Phi}\alpha_1\right]\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1-1}\\ &+\frac{\varepsilon^0\Phi}{K^2}\frac{\Delta\nu}{\nu}-\frac{\varepsilon\Phi}{L^2}\frac{\Delta\nu}{\nu}+\frac{\varepsilon_1\Phi}{L^2}\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1}-\frac{\varepsilon_1^0\Phi}{K_1^2}\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1}=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n+2}{n}a\left(\frac{F}{R}\right)^2+\left(\frac{4n+4}{n}a^2-\frac{2n+1}{n-1}a^2\right)\frac{F}{R}\\ &+\frac{n_1+2}{n_1}a_1\left(\frac{F_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{4n_1+4}{n_1}aa_1+\frac{2n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right)\frac{F}{R_1}\\ &+\left(\frac{3n+2}{n}a+\frac{3n_1+2}{n_1}a_1\right)a^2-\left(\frac{3n+1}{n-1}a^2-\frac{3n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right)a+\left(\frac{n^2}{(n-1)^2}a^3+\frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}a_1^3\right)\\ &+2\left(\frac{E}{K}+\frac{e^0}{K}\right)F^3{}^*S^0-2\left(\frac{E}{K}+\frac{e}{L}\right)F^3{}^*S+2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1}{L}\right)F^3{}^*S_1-2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{e_1^0}{K_1}\right)F^3{}^*S_1^0=0 \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{6\mathfrak{D}_\delta}\left[\left(\frac{3n+1}{n}a+\frac{3n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{3\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]+\frac{F\Phi}{6\mathfrak{D}_\delta}[c+c_1+\gamma+\gamma_1]-2F^3C+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\mathfrak{C}\\ &\frac{n+1}{n}a\frac{F}{R}+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}+\left(\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right)a-\frac{n}{n-1}a^2+\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2\\ &+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)a-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}a_1\right]\\ &+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)(\alpha+\beta)-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{6\nu(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{6\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0 \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta}{6\mathfrak{D}}\left[\left(\frac{3n+1}{n}a+\frac{3n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{3\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{3\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]+\frac{F\Phi}{6\mathfrak{D}}\delta\,[c+c_1+\gamma+\gamma_1]+2\,\Phi^2\Gamma+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\,\mathfrak{C}\\
&-\frac{n+1}{\nu}\alpha\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\frac{\Phi}{P_1}-\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)(\alpha+\delta)+\frac{\nu}{\nu-1}\alpha^2-\frac{\nu_1}{\nu_1-1}\alpha_1^2\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)a-\frac{3n^2+2n+1}{6n\,(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1\,(n_1-1)}a_1\right]\\
&+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)(\alpha+\delta)-\frac{3\nu^2+2\nu+1}{6\nu\,(\nu-1)}\alpha-\frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{6\nu_1\,(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0
\end{aligned}\right\}\quad(118)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\nu+2}{\nu}\alpha\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2+\left(\frac{4\nu+4}{\nu}\alpha\,(\alpha+\delta)-\frac{2\nu+1}{\nu-1}\alpha^2\right)\frac{\Phi}{P}\\
&+\frac{\nu_1+2}{\nu_1}\alpha_1\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2+\left(\frac{4\nu_1+4}{\nu_1}\alpha_1\,(\alpha+\delta)+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1-1}\alpha_1^2\right)\frac{\Phi}{P_1}\\
&+\left(\frac{3\nu+2}{\nu}\alpha+\frac{3\nu_1+2}{\nu_1}\alpha_1\right)(\alpha+\delta)^2-\left(\frac{3\nu+1}{\nu-1}\alpha^2-\frac{3\nu_1+1}{\nu_1-1}\alpha_1^2\right)(\alpha+\delta)+\left(\frac{\nu^2}{(\nu-1)^2}\alpha^3+\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)^2}\alpha_1^3\right)\\
&+2\left(\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon^0}{K}\right)\Phi^3{}^*\Sigma^0-2\left(\frac{E}{K}+\frac{\varepsilon}{L}\right)\Phi^3{}^*\Sigma+2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1}{L}\right)\Phi^3{}^*\Sigma_1-2\left(\frac{E_1}{K_1}+\frac{\varepsilon_1^0}{K_1}\right)\Phi^3{}^*\Sigma_1^0=0
\end{aligned}\right\}\quad(122)$$

Die Gleichungen sind in der Weise zu verwenden, dass zunächst eine Bestimmung der gesuchten Werthe in erster Annäherung erfolgt; wir unterscheiden nämlich Glieder, welche proportional den Dicken und Entfernungen der Einzellinsen sind, von solchen, in denen diese Grössen nicht vorkommen, und da wir, ohne uns indess eine Vernachlässigung zu erlauben, Linsen von geringer Dicke und Entfernung voraussetzten, so ist es gestattet, die ersterwähnte Gattung von Gliedern nur correctionsweise zu verwenden. Durch wiederholte Correctionen kann aber den Gleichungen bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit entsprochen werden.

Nach den vorstehenden Formeln soll ein Doppelobjectiv berechnet werden, und zwar unter Voraussetzung der Seite 88 erwähnten Glasmassen. Legen wir der Berechnung die optisch wirksamsten, also die Mitte zwischen den Streifen D und E haltenden Strahlen zu Grunde und setzen wir ferner voraus, dass in beiden Doppellinsen das Flintglas dem Crownglase folge, so haben wir unter Beschränkung auf höchstens fünf Ziffern

$$n = \nu = 1{,}5313 \qquad n_1 = \nu_1 = 1{,}6385$$

und zur Aufhebung der Farbenabweichung

$$\frac{\Delta n}{n-1} : \frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} = \frac{\Delta \nu}{\nu - 1} : \frac{\Delta \nu_1}{\nu_1 - 1} = 1{,}700$$

anzunehmen. Diese Werthe in Gleichung (122) und (123), unter alleiniger Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung eingesetzt, ergeben

$$a = \alpha = 2{,}4286\,, \qquad a_1 = \alpha_1 = -\,1{,}4286$$

und wenn wir diese Zahlen unter gleicher Voraussetzung in die Gleichungen (120), (117), (118) und (121) einführen, so ergiebt sich

$$5{,}6004 \left(\frac{F}{R}\right)^2 - 6{,}1043 \left(\frac{F}{R}\right) - 3{,}1724 \left(\frac{F}{R}\right)^2 - 8{,}6775 \left(\frac{F}{R_1}\right) + 21{,}017 = 0 \quad . \; . \quad (120)$$

$$0{,}6190 \frac{F+\Phi}{\mathfrak{D}} \frac{1}{\mathfrak{z}} + 4{,}0145 \left(\frac{F}{R}\right) - 2{,}3005 \left(\frac{F}{R_1}\right) - 5{,}1713 = 0 \quad (117)$$

$$0{,}6190 \frac{F+\Phi}{\mathfrak{D}} \mathfrak{z} - 4{,}0145 \left(\frac{\Phi}{P}\right) + 2{,}3005 \left(\frac{\Phi}{P_1}\right) - 2{,}7140\, \mathfrak{z} + 5{,}1713 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (118)$$

$$5{,}6004 \left(\frac{\Phi}{P}\right)^2 + (16{,}058\, \mathfrak{z} - 6{,}1043) \frac{\Phi}{P} - 3{,}1724 \left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2 - (9{,}2020\, \mathfrak{z} + 8{,}6775) \frac{\Phi}{P_1} + 4{,}4280\, \mathfrak{z}^2 - 21{,}683\, \mathfrak{z} + 21{,}017 = 0 \quad . \; . \; . \quad (121)$$

Da $r = r_1$ werden soll, so entnehmen wir aus Gleichung (120)

$$\frac{F}{R} = \frac{F}{R_1} = 2{,}2629$$

indem der zweite Wurzelwerth $\frac{F}{R} = \frac{F}{R_1} = 3{,}8251$ der zu starken Krümmungen wegen sich weniger empfehlen dürfte. Die Gleichungen (117) und (118) ergeben dann

$$0{,}6190\,\frac{F+\Phi}{\mathfrak{D}} = 1{,}2927\,\mathfrak{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

und

$$4{,}0145\,\frac{\Phi}{P} - 2{,}3005\,\frac{\Phi}{P_1} - 1{,}2927\,\mathfrak{z}^2 + 2{,}7140\,\mathfrak{z} - 5{,}1713 = 0 \quad (118)$$

und es zeigt sich daher, dass lediglich vom Werthe $\mathfrak{z}$, also vom Verhältniss der Brennweiten der Doppellinsen die Bestimmung der Werthe $\frac{\Phi}{P}$ und $\frac{\Phi}{P_1}$ abhängt.

Wir setzen nun die Brennweite $\mathfrak{F}$ des Gesammtsystems als Einheit, die halbe freie Oeffnung der zweiten Doppellinse $H = 0{,}21$, den halben Bildwinkel $\vartheta = 20^0$, sowie den zur Erreichung der verlangten Lichtstärke erforderlichen Radius der Blendenöffnung $x = 0{,}084$ voraus und erhalten somit

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F} = \frac{\mathfrak{D}}{F} = \frac{H-x}{\operatorname{tg}\vartheta - x} = 0{,}4500 \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

Da aber

$$\frac{F+\Phi}{\mathfrak{D}} = \left(\frac{\Phi}{F-\mathfrak{D}} + 1\right)\frac{1-\frac{\mathfrak{D}}{F}}{\frac{\mathfrak{D}}{F}} + 1 \quad \ldots\ldots \quad (124)$$

und folglich für den vorliegenden Fall

$$\frac{F+\Phi}{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{z}+1)\,\frac{0{,}5500}{0{,}4500} + 1$$

ist, so nimmt die Gleichung (117) die Form

$$0{,}6190\left[(\mathfrak{z}+1)\,\frac{0{,}5500}{0{,}4500} + 1\right] = 1{,}2927\,\mathfrak{z}$$

an und ergiebt

$$\mathfrak{z} = 2{,}566.$$

Für $\mathfrak{F} = 1$ ist, wie leicht ersichtlich,

$$F = \frac{\mathfrak{z}+1}{\mathfrak{z}}, \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{D}}{F}\,\frac{\mathfrak{z}+1}{\mathfrak{z}}, \quad \Phi = \left(1 - \frac{\mathfrak{D}}{F}\right)(\mathfrak{z}+1)$$

so dass wir die Werthe

$$F = 1{,}3898, \quad \mathfrak{D} = 0{,}6254, \quad \Phi = 1{,}9613$$

und demnach

$$\mathfrak{E} = -0{,}3189$$

sowie aus Gleichung (84)

$$H = 0{,}2000$$

erhalten. Wir benutzen nun den Werth von $\mathfrak{z}$, um aus den Glei-

chungen (118) und (121) die inneren Radien der zweiten Doppellinse zu bestimmen, und da diese Gleichungen nun übergehen in

$$4{,}0145\left(\frac{\Phi}{P}\right) - 2{,}3005\left(\frac{\Phi}{P_1}\right) - 6{,}717 = 0 \quad . \quad . \quad (118)$$

und

$$\begin{aligned} &5{,}6004\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2 + 35{,}100\left(\frac{\Phi}{P}\right) \\ &-3{,}1724\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2 - 32{,}289\left(\frac{\Phi}{P_1}\right) \end{aligned} - 5{,}468 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

so ergiebt sich

$$\left(\frac{\Phi}{P}\right) = +\,5{,}280, \quad \left(\frac{\Phi}{P_1}\right) = +\,6{,}294$$

oder

$$\left(\frac{\Phi}{P}\right) = -\,3{,}035, \quad \left(\frac{\Phi}{P_1}\right) = -\,8{,}216,$$

von welchen Werthen wir, der schwächeren Krümmung wegen, den ersteren den Vorzug geben.

Hierdurch sind die Elemente des Linsensystems in erster Annäherung bestimmt, und durch die äusseren Radien vervollständigt, stellen wir dieselben in Nachstehendem zusammen:

$$\left(\frac{F}{R^0}\right) = -\,2{,}308, \left(\frac{F}{R}\right) = +\,2{,}2629, \left(\frac{F}{R}\right) = +\,2{,}2629, \left(\frac{F}{R_1^0}\right) = +\,0{,}0254$$

$$\left(\frac{\Phi}{P^0}\right) = +\,0{,}709, \left(\frac{\Phi}{P}\right) = +\,5{,}280, \left(\frac{\Phi}{P_1}\right) = +\,6{,}294, \left(\frac{\Phi}{P_1^0}\right) = +\,4{,}0565$$

Aus der Oeffnung und den Radien der Sammellinsen ergiebt sich deren Dicke im Minimum; für die Zerstreuungslinsen ist dieselbe willkürlich. Wir nehmen demgemäss

$$d = 0{,}07\ , \quad d_1 = 0{,}02\ , \quad \delta = 0{,}06 \quad \text{und} \quad \delta_1 = 0{,}02$$

und erhalten dann

$$e^0 = -\,0{,}0226, \quad e = +\,0{,}0231, \quad e_1 = +\,0{,}00014, \quad e_1^0 = +\,0{,}0124$$
$$\varepsilon^0 = -\,0{,}0452, \quad \varepsilon = -\,0{,}0061, \quad \varepsilon_1 = +\,0{,}0221\ , \quad \varepsilon_1^0 = +\,0{,}0343.$$

Die Entfernung der inneren Flächenscheitel ist für die erste Doppellinse gleich Null, für die zweite aber, wenn wir die Ränder als zusammenfallend voraussetzen, gleich 0,0120 zu setzen, so dass wir

$$D = e - e_1 = +\,0{,}0230$$
$$\Delta = 0{,}0120 + \varepsilon - \varepsilon_1 = -\,0{,}0162$$

und danach

$$E = +\,0{,}0342, \quad E_1 = +\,0{,}0559, \quad E = -\,0{,}0215, \quad E_1 = -\,0{,}0381$$

erhalten. Die Quotienten der Brenn- und Vereinigungsweiten sind

$$\frac{F}{K} = 0\,, \quad \frac{F}{L} = -\,2{,}4286\,, \quad \frac{F}{K_1} = -\,1,$$

$$\frac{\Phi}{K} = -\,2{,}566, \quad \frac{\Phi}{L} = -\,4{,}995 \text{ und } \frac{\Phi}{K_1} = -\,3{,}566.$$

Wir schreiten nun zur weiteren Annäherung, indem wir die vorstehend näherungsweise ermittelten Elemente des Systems zur Substitution in die Glieder zweiter Ordnung benutzen. Es wird, um nur die hauptsächlichsten Correctionswerthe zusammenzustellen,

$$F^3 S^0 = +\,1{,}3929, \quad F^3 S = -\,20{,}973,$$
$$F^3 S_1 = -\,22{,}695, \quad F^3 S_1^0 = -\,0{,}3331,$$

$$\Phi^3 \Sigma^0 = -\,8{,}754\,, \quad \Phi^3 \Sigma = -\,214{,}38,$$
$$\Phi^3 \Sigma_1 = -\,295{,}11, \quad \Phi^3 \Sigma_1^0 = -\,93{,}02,$$

$$c = -\,0{,}717, \quad c_1 = +\,0{,}002, \quad \gamma = +\,0{,}238, \quad \gamma_1 = +\,0{,}526$$
$$C = -\,0{,}022, \quad \Gamma = -\,0{,}157, \quad \mathfrak{C} = +\,0{,}0060$$

$$\frac{D}{ff_1}\left[\left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n_1}\right)\frac{F}{L} - 6\,\frac{n+1}{n}\,\frac{F}{R} + 6\,\frac{n_1+1}{n_1}\,\frac{F}{R_1} + \frac{3n^2+2n+1}{n(n-1)}\,a + \frac{3n_1^2+2n_1+1}{n_1(n_1-1)}\,a_1\right] = +\,0{,}10769$$

$$\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\left(\frac{5}{\nu} - \frac{5}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L} - 6\,\frac{\nu+1}{\nu}\,\frac{\Phi}{P} + 6\,\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\,\frac{\Phi}{P_1} + \frac{3\nu^2+2\nu+1}{\nu(\nu-1)}\,\alpha + \frac{3\nu_1^2+2\nu_1+1}{\nu_1(\nu_1-1)}\,\alpha_1\right] = -\,0{,}05563$$

und die corrigirten Bedingungsgleichungen lauten dann:

$$0{,}9870\,a + 0{,}9598 \,.\, 1{,}700\,a_1 - 0{,}0399 = 0 \;.\;.\;. \quad (122)$$
$$1{,}0388\,\alpha + 1{,}0416 \,.\, 1{,}700\,\alpha_1 + 0{,}0133 = 0 \;.\;.\;. \quad (123)$$

und wenn wir die daraus sich ergebenden Werthe

$$a = 2{,}4535 \qquad a_1 = -\,1{,}4535$$
$$\alpha = 2{,}4210 \qquad \alpha_1 = -\,1{,}4210$$

in die anderen Gleichungen einsetzen,

$$5{,}6579\left(\frac{F}{R}\right)^2 - 6{,}227\left(\frac{F}{R}\right) - 3{,}2277\left(\frac{F}{R_1}\right)^2 - 8{,}819\left(\frac{F}{R_1}\right) + 21{,}711 = 0 \;.\;.\;. \quad (120)$$

$$\left[\frac{0{,}6192}{F}+\frac{0{,}6190}{\Phi}+0{,}0663\right]\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\frac{1}{\mathfrak{z}}+4{,}0557\left(\frac{F}{R}\right)-2{,}3406\left(\frac{F}{R_1}\right)$$
$$-5{,}182=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

$$\left[\frac{0{,}6192}{F}+\frac{0{,}6190}{\Phi}+0{,}0663\right]\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\mathfrak{z}-4{,}0020\left(\frac{\Phi}{P}\right)+2{,}2882\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)$$
$$-2{,}7137\,\mathfrak{z}+3{,}9134=0 \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

$$5{,}5830\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2+[16{,}008\,\mathfrak{z}-6{,}065]\left(\frac{\Phi}{P}\right)$$
$$-3{,}1555\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2-[0{,}153\,\mathfrak{z}+8{,}633]\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)$$
$$+4{,}4275\,\mathfrak{z}^2-21{,}568\,\mathfrak{z}+55{,}932=0 \quad \ldots \quad (121)$$

Da $\left(\frac{F}{R}\right)=\left(\frac{F}{R_1}\right)$ werden soll, so ergiebt Gleichung (120) als geeignetsten Wurzelwerth

$$\left(\frac{F}{R}\right)=\left(\frac{F}{R_1}\right)=+2{,}290$$

und dessen Einsetzung in Gleichung (117) führt zur Bedingung

$$\left[\frac{0{,}6192}{F}+\frac{0{,}6190}{\Phi}+0{,}0663\right]\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\frac{1}{\mathfrak{z}}=1{,}2544, \quad \ldots \quad (117)$$

so dass an Stelle der Gleichung (118)

$$4{,}0020\,\frac{\Phi}{P}-2{,}2882\,\frac{\Phi}{P_1}-1{,}2544\,\mathfrak{z}^2+2{,}7137\,\mathfrak{z}-3{,}934=0 \quad (118)$$

tritt. Es ist aber

$$\left[\frac{0{,}6192}{F}+\frac{0{,}6190}{\Phi}+0{,}0663\right]\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}$$
$$=\left[0{,}6192\,\frac{\Phi}{F-\mathfrak{D}}\left(1-\frac{\mathfrak{D}}{F}\right)+0{,}6190+0{,}0663\left(\frac{\Phi}{F-\mathfrak{D}}+1\right)\left(1-\frac{\mathfrak{D}}{F}\right)\right]$$
$$=\left[(0{,}6855\,\mathfrak{z}+0{,}0663)\left(1-\frac{\mathfrak{D}}{F}\right)+0{,}6190\right]\frac{F}{\mathfrak{D}}$$

so dass für Gleichung (117)

$$(0{,}6855\,\mathfrak{z}+0{,}0663)\left(1-\frac{\mathfrak{D}}{F}\right)+0{,}6190=1{,}2544\,\frac{\mathfrak{D}}{F}\mathfrak{z} \quad (117)$$

gesetzt werden kann, und diese Beziehung führt für

$$\frac{\mathfrak{D}}{F}=0{,}4500 \quad \text{zu} \quad \mathfrak{z}=3{,}496.$$

Da durch diesen, vom früheren sehr abweichenden Werth von $\mathfrak{z}$ das Verhältniss der Brennweiten der Doppellinsen und auch die

Krümmungen der zweiten Doppellinse sehr wesentlich alterirt werden würden, so erscheint es zweckmässig, unter Beibehaltung des früheren Werthes von $\mathfrak{z}$, $\frac{\mathfrak{D}}{F}$ anders zu bestimmen und zwar ergiebt der obige Zusammenhang

$$\frac{\mathfrak{D}}{F} = 0{,}4847 \quad \text{für} \quad \mathfrak{z} = 2{,}566$$

und die Gleichung (84) würde übergehen in

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{F}}{F} = \frac{\mathfrak{D}}{F} = \frac{H - x}{\operatorname{tg}\vartheta - x} = 0{,}4847, \quad \ldots \quad (84)$$

so dass unter Voraussetzung der früheren Werthe

$$\vartheta = 20^0 \qquad x = 0{,}084$$
$$H = 0{,}2197$$

zu setzen wäre. Wir sind zu dieser Abänderung des Werthes H durch die ausdrückliche Reserve berechtigt, dass die strenge Beibehaltung desselben nicht erforderlich sei; wir hätten übrigens der in Gleichung (84) ausgesprochenen Bedingung auch durch einen etwas verringerten Bildwinkel unter Beibehaltung der Linsenöffnung entsprechen können. Aus den, hier für $\frac{\mathfrak{D}}{F}$ und $\mathfrak{z}$ entwickelten Werthen ergeben sich nach den, bei Gelegenheit der ersten Annäherung entwickelten Formeln

$$F = 1{,}3897, \quad \mathfrak{D} = 0{,}6735 \quad \text{und} \quad \Phi = 1{,}8375$$

und jenem Werthe von $\mathfrak{z}$ zufolge erhalten wir auch an Stelle der Gleichungen (118) und (121) die Beziehungen

$$4{,}0020\left(\frac{\Phi}{P}\right) - 2{,}2882\left(\frac{\Phi}{P_1}\right) - 5{,}230 = 0 \quad \ldots \quad (118)$$

und

$$\begin{aligned} &5{,}5830\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2 + 35{,}011\left(\frac{\Phi}{P}\right) \\ &-3{,}1555\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2 - 32{,}119\left(\frac{\Phi}{P_1}\right) \end{aligned} + 29{,}741 = 0 \quad \ldots \quad (121)$$

so dass, wenn wir nur die geeignetsten Wurzeln berücksichtigen,

$$\frac{\Phi}{P} = +\,5{,}141 \quad \text{und} \quad \frac{\Phi}{P_1} = +\,6{,}705$$

resultirt. Wir stellen hiernach die Elemente des Systems in Folgendem zusammen:

$$\frac{F}{R^0} = -2{,}328, \quad \frac{F}{R} = +2{,}290, \quad \frac{F}{R_1} = +2{,}290, \quad \frac{F}{R_1^0} = +0{,}0135$$

$$\frac{\Phi}{P^0} = +0{,}584, \quad \frac{\Phi}{P} = +5{,}141, \quad \frac{\Phi}{P_1} = +6{,}705, \quad \frac{\Phi}{P_1^0} = +4{,}479.$$

Nach den, durch die Gleichung (42) gegebenen Beziehungen ist dann

$$\frac{F}{r^0} = -2{,}328, \quad \frac{F}{r} = +2{,}383, \quad \frac{F}{r_1} = +2{,}383, \quad \frac{F}{r_1^0} = +0{,}0141$$

$$\frac{\Phi}{\rho^0} = +0{,}533, \quad \frac{\Phi}{\rho} = +4{,}917, \quad \frac{\Phi}{\rho_1} = +6{,}644, \quad \frac{\Phi}{\rho_1^0} = +4{,}467$$

so dass die Radien selbst die Werthe

$$r^0 = -0{,}5970, \quad r = +0{,}5832, \quad r_1 = +0{,}5832, \quad r_1^0 = +10{,}3$$

$$\rho^0 = +3{,}45, \quad \rho = +0{,}3737, \quad \rho_1 = +0{,}2766, \quad \rho_1^0 = +0{,}4114$$

erhalten. Nehmen wir hinzu $\mathfrak{D} = 0{,}6735$, eine Bestimmung, welcher zufolge die innere Scheitelentfernung der beiden Doppellinsen $\mathfrak{D} - (E_1 + e_1^0) + (E + \varepsilon^0) = 0{,}5385$ sich ergiebt, ferner die Dicken und Entfernungen der Einzellinsen, so haben wir die sämmtlichen Elemente des Systems beisammen. Es ist ausserdem selbstverständlich, dass in derselben Weise, wie hier durchgeführt, eine abermalige Correction der gewonnenen Werthe Statt finden, sowie, dass durch Fortsetzung des Correctionsverfahrens den aufgestellten Bedingungsgleichungen bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit entsprochen werden könnte.

B. Die zur Achse windschiefen Strahlen sollen ein ebenes Bild entwerfen, dagegen falle für die, die Achse schneidenden Strahlen die Forderung eines ebenen Bildes hinweg; im Uebrigen sollen dieselben Bedingungen, wie im vorigen Falle, erfüllt werden.

Die Untersuchung der Bildkrümmung durch die windschiefen Strahlen und der damit zusammenhängenden Fragen lässt sich selbstständig durch Zurückgehen auf die Gleichungen (82) durchführen. Wenden wir die erste derselben auf die zweite und vierte Linse, die zweite dieser Gleichungen auf die erste und dritte Einzellinse an, so ergiebt die Addition aller derart aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{1}{\omega_1^0}-\frac{1}{o^0}=\frac{n+1}{nf}+\frac{n_1+1}{n_1 f_1}+\frac{\nu+1}{\nu\varphi}+\frac{\nu_1+1}{\nu_1\varphi_1}+b+b_1+\beta+\beta_1$$
$$+2\frac{u}{nf}\left[\frac{2n+1}{k}-\frac{n+1}{r}+\frac{n^2}{(n-1)f}\right]+2u^2 s+4u[{}^*s^0 e^0-{}^*s e]$$
$$+2\frac{u_1}{n_1 f_1}\left[\frac{2n_1+1}{k_1}-\frac{n_1+1}{r_1}-\frac{n_1^2}{(n_1-1)f_1}\right]+2u_1^2 s_1+4u_1[{}^*s_1 e_1-{}^*s_1^0 e_1^0]$$
$$+2\frac{\nu}{\nu\varphi}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa}-\frac{\nu+1}{\varrho}+\frac{\nu^2}{(\nu-1)\varphi}\right]+2\nu^2\sigma+4\nu[{}^*\sigma^0\varepsilon^0-{}^*\sigma\varepsilon]$$
$$+2\frac{\nu_1}{\nu_1\varphi_1}\left[\frac{2\nu+1}{\varkappa_1}-\frac{\nu+1}{\varrho_1}-\frac{\nu_1^2}{(\nu_1-1)\varphi_1}\right]+2\nu_1\sigma_1+4\nu_1[{}^*\sigma_1\varepsilon_1-{}^*\sigma_1^0\varepsilon_1^0],$$

wenn o^0 der Krümmungshalbmesser der Objectfläche, ω_1^0 der der letzten Bildfläche ist. Wird nun der vorstehende Werth gleich Null gesetzt und dann einer Rechnung unterworfen, welche der mit Gleichung (108) angestellten Schritt für Schritt entspricht und deren Reproduction aus diesem Grunde wohl als überflüssig erscheint, so erhalten wir als Bedingungen dafür, dass die windschiefen Strahlen ebene und zusammenfallende Bildflächen liefern:

$$\frac{1}{2\mathfrak{D}_\delta}\left[\left(\frac{n+1}{n}a+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]$$
$$+\frac{F\Phi}{2\mathfrak{D}_\delta}[b+b_1+\beta+\beta_1]-2F^2C+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\mathfrak{C}$$
$$+\frac{n+1}{n}a\frac{F}{R}+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}$$
$$-\left(\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right)\frac{F}{L}-\frac{n}{n-1}a^2+\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2$$
$$+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{n^2+1}{2n(n-1)}a\right.$$
$$\left.-\frac{n_1^2+1}{2n_1(n_1-1)}a_1\right]$$
$$+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}_\delta}\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{\nu^2+1}{2\nu(\nu-1)}\alpha\right.$$
$$\left.-\frac{\nu_1^2+1}{2\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0$$

und

$$\frac{\delta}{2\mathfrak{D}}\left[\left(\frac{n+1}{n}a+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\right)\Phi+\left(\frac{\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)F\right]$$
$$+\frac{F\Phi}{2\mathfrak{D}}\delta\left[b+b_1+\beta+\beta_1\right]+2\Phi^2\Gamma+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\mathfrak{C}$$
$$-\frac{\nu+1}{\nu}\alpha\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\frac{\Phi}{P_1}$$
$$+\left(\frac{2\nu+1}{\nu}\alpha+\frac{2\nu_1+1}{\nu_1}\alpha_1\right)\frac{\Phi}{L}+\frac{\nu}{\nu-1}\alpha^2-\frac{\nu_1}{\nu_1-1}\alpha_1^2$$
$$+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\frac{F}{L}-\frac{n^2+1}{2n(n-1)}a\right.$$
$$\left.-\frac{n_1^2+1}{2n_1(n_1-1)}a_1\right]$$
$$+\frac{F\Phi}{\mathfrak{D}}\delta\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\Phi}{P}-\frac{\nu_1+1}{\nu_1}\frac{\Phi}{P_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_1}\right)\frac{\Phi}{L}-\frac{\nu^2+1}{2\nu(\nu-1)}\alpha\right.$$
$$\left.-\frac{\nu_1^2+1}{2\nu_1(\nu_1-1)}\alpha_1\right]=0.$$

Die Annullirung der zweiten Derivirten des Krümmungshalbmessers liefert natürlich auch hier eine Bedingung, welche mit der für die Wegschaffung der sphärischen Centralabweichung übereinstimmt. Die vorstehenden Gleichungen treten an Stelle der für den vorigen Fall entwickelten Gleichungen (117) und (118); im Uebrigen bleiben die dort aufgestellten Gleichungen in Kraft. Auch die numerische Rechnung für diesen Fall ist der für den vorigen durchgeführten durchaus entsprechend.

C. Als drittes Beispiel wählen wir ein Objectiv mit Doppellinsen von gleicher Brennweite, welches zur Abbildung naher Objecte in natürlicher Grösse dienen soll. Es mögen für beide Doppellinsen dieselben Glasmassen, aber in entgegengesetzter Folge verwendet werden. Sowohl die die Achse schneidenden, wie die zu ihr windschiefen Strahlen sollen ebene und zusammenfallende Bilder liefern.

Die natürliche Grösse der Abbildung wird bedingt durch die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}}=\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}-\mathfrak{K}}=\pm 1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

da hier nur das negative Zeichen zu einem Resultate führt, so erhalten wir

$$\mathfrak{K} = + 2\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{K}_1 = - 2\mathfrak{F},$$

und, wenn wir die Gesammtbrennweite als Einheit zu Grunde legen,

$$\mathfrak{K} = + 2, \quad \mathfrak{K}_1 = - 2;$$

Object und Bild liegen daher symmetrisch zu den Hauptpunkten in der Entfernung der doppelten Brennweite. Es ist ferner

$$x = \mathfrak{F}\sqrt{\mathfrak{H}:\mathfrak{J}} = \sqrt{\mathfrak{H}:\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}}{F} = \frac{H - x}{\operatorname{tg}\vartheta - {}^1/_2 x},$$

und wenn daher Lichtstärke, Oeffnung der zweiten Doppellinse und Bildwinkel eine gegebene Grösse erhalten sollen, so ist

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{D}}{F} = \psi$$

ein durch diese Grössen bestimmter Werth. Die Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Phi} - \frac{\mathfrak{D}}{F\Phi}$$

lässt dann ersehen, dass

$$F = \Phi = 2 - \psi, \quad \mathfrak{D} = 2\psi - \psi^2, \quad -\mathfrak{E} = +\mathfrak{E}_1 = \psi$$

wird, und es ist ferner leicht, die Beziehungen

$$K = -K_1 = F = 2 - \psi, \quad K_1 = -K = \infty$$

$$\frac{F}{L} = a_1, \quad \frac{\Phi}{L} = -\alpha$$

$$\vartheta = 1$$

zu entwickeln. Hierauf fussend können wir den für jedes Doppelobjectiv geltenden Bedingungen im vorliegenden Falle folgende Form geben:

$$\left.\begin{aligned} &a\left[1 + \frac{E}{2-\psi} + \frac{e^0 e}{d(2-\psi)}a\right]\frac{\Delta n}{n-1} + a_1\left[1 + \frac{e_1 e_1^0}{d_1(2-\psi)}a_1\right]\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} \\ &+ \frac{e^0}{2-\psi}\frac{\Delta n}{n} - \frac{e}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n}{n} + \frac{e_1}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n_1}{n_1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (123)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\left[1 - \frac{E_1}{2-\psi} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^0}{\delta_1(2-\psi)}\alpha_1\right]\frac{\Delta n}{n-1} + \alpha\left[1 + \frac{\varepsilon^0\varepsilon}{\delta(2-\psi)}\alpha\right]\frac{\Delta n_1}{n_1 - 1} \\ &- \frac{\varepsilon_1^0}{2-\psi}\frac{\Delta n}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2-\psi}\alpha^2\frac{\Delta n}{n} - \frac{\varepsilon}{2-\psi}\alpha^2\frac{\Delta n_1}{n_1} = 0; \end{aligned}\right\} \quad 124$$

es ist ferner zu verlangen, dass

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n+2}{n}\,a\left(\frac{F}{R}\right)^2-\left[\frac{4n+4}{n}\,aa_1+\frac{2n+1}{n-1}\,a^2\right]\left(\frac{F}{R}\right)\\
&+\frac{n_1+2}{n_1}\,a_1\left(\frac{F}{R_1}\right)^2-\left[\frac{4n_1+4}{n_1}\,a_1^2-\frac{2n_1+1}{n_1-1}\,a_1^2\right]\left(\frac{F}{R_1}\right)\\
&+\left[\frac{3n+2}{n}\,a+\frac{3n_1+2}{n_1}\,a_1\right]a_1^2+\left[\frac{3n+1}{n-1}\,a^2-\frac{3n_1+1}{n_1-1}\,a_1^2\right]a_1\\
&\qquad+\left[\frac{n^2}{(n-1)^2}\,a^3+\frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}\,a_1^3\right]\\
&+2\,(2-\psi)^2\,[(E+e^0)\,{}^*S^0-(E+a_1\,e)\,{}^*S+a_1e_1\,{}^*S_1]=0,
\end{aligned}\right\}\quad(121)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n+2}{n}\,\alpha_1\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)^2+\left[\frac{4n+4}{n}\,\alpha\alpha_1+\frac{2n+1}{n-1}\,\alpha_1^2\right]\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)\\
&+\frac{n_1+2}{n_1}\,\alpha\left(\frac{\Phi}{P}\right)^2+\left[\frac{4n_1+4}{n_1}\,\alpha^2-\frac{2n_1+1}{n_1-1}\,\alpha^2\right]\left(\frac{\Phi}{P}\right)\\
&+\left[\frac{3n+2}{n}\,\alpha_1+\frac{3n_1+2}{n_1}\,\alpha\right]\alpha^2+\left[\frac{3n+1}{n-1}\,\alpha_1^2-\frac{3n_1+1}{n_1-1}\,\alpha^2\right]\alpha\\
&\qquad+\left[\frac{n^2}{(n-1)^2}\,\alpha_1^3+\frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}\,\alpha_1^3\right]\\
&+2\,(2-\psi)^2\,[(E_1+\varepsilon_1^0)\,{}^*\Sigma_1^0-(E_1+\alpha\varepsilon_1)\,{}^*\Sigma_1+\alpha\varepsilon\,{}^*\Sigma]=0,
\end{aligned}\right\}\quad(122)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{6\psi}\left[\frac{3n+1}{n}\,(a+\alpha_1)+\frac{3n_1+1}{n_1}\,(a_1+\alpha)\right]\\
&+\frac{2-\psi}{6\psi}\,[c+c_1+\gamma+\gamma_1]-2\,(2-\psi)^2\,C+\frac{2-\psi}{\psi}\,\mathfrak{C}\\
&+\frac{n+1}{n}\,a\left(\frac{F}{R}\right)+\frac{n_1+1}{n_1}\,a_1\left(\frac{F}{R_1}\right)\\
&-\left[\frac{2n+1}{n}\,a+\frac{2n_1+1}{n_1}\,a_1\right]a_1-\frac{n}{n-1}\,a^2+\frac{n_1}{n_1-1}\,a_1^2\\
&+\frac{2-\psi}{\psi}\,\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\left(\frac{F}{R}\right)-\frac{n_1+1}{n_1}\left(\frac{F}{R_1}\right)-{}^5/_6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)a_1\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3n^2+2n+1}{6n\,(n-1)}\,a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1\,(n_1-1)}\,a_1\right]\\
&+\frac{2-\psi}{\psi}\,\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[-\frac{n+1}{n}\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)+\frac{n_1+1}{n_1}\left(\frac{\Phi}{P}\right)-{}^5/_6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\alpha\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3n^2+2n+1}{6n\,(n-1)}\,\alpha_1-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1\,(n_1-1)}\,\alpha\right]=0,
\end{aligned}\right\}\quad(117)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{6\psi}\left[\frac{3n+1}{n}(\alpha_1+a)+\frac{3n_1+1}{n_1}(\alpha+a_1)\right]\\
&+\frac{2-\psi}{\psi}[c+c_1+\gamma+\gamma_1]+2(2-\psi)^2\Gamma+\frac{2-\psi}{\psi}\mathfrak{C}\\
&-\frac{n+1}{n}\alpha_1\left(\frac{\Phi}{P_1}\right)-\frac{n_1+1}{n_1}\alpha\frac{\Phi}{P}\\
&-\left[\frac{2n+1}{n}\alpha_1+\frac{2n_1+1}{n_1}\alpha\right]\alpha-\frac{n}{n-1}\alpha_1^2+\frac{n_1}{n_1-1}\alpha^2\\
&+\frac{2-\psi}{\psi}\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-{}^5/_6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)a_1\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}a_1\right]\\
&+\frac{2-\psi}{\psi}\frac{\Delta}{\varphi\varphi_1}\left[-\frac{n+1}{n}\frac{\Phi}{P_1}+\frac{n_1+1}{n_1}\frac{\Phi}{P}-{}^5/_6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)\alpha\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}\alpha_1-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}\alpha\right]=0,
\end{aligned}\right\}(118)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n-1}{nr}-\frac{n-1}{nr^0}+\frac{n_1-1}{n_1r_1^0}-\frac{n_1-1}{n_1r_1}\\
&+\frac{\nu-1}{\nu\rho}-\frac{\nu-1}{\nu\rho^0}+\frac{\nu_1-1}{\nu_1\rho_1^0}-\frac{\nu_1-1}{\nu_1\rho_1}=0\\
&\text{oder}\\
&\frac{1}{nf}+\frac{1}{n_1f_1}+\frac{1}{\nu\varphi}+\frac{1}{\nu_1\varphi_1}\\
&+\frac{n-1}{n}\frac{e}{r}\frac{1}{f}+\frac{n_1-1}{n_1}\frac{e_1}{r_1}\frac{1}{f_1}+\frac{\nu-1}{\nu}\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{1}{\varphi}+\frac{\nu_1-1}{\nu_1}\frac{\varepsilon_1}{\rho_1}\frac{1}{\varphi_1}=0
\end{aligned}\right\}(120)$$

Wenn wir nun die vollständige Symmetrie der beiden Doppellinsen, den Bedingungen

$$\frac{F}{R}=-\frac{\Phi}{P_1},\quad \frac{F}{R^1}=-\frac{\Phi}{P},\quad d=\delta_1,\quad D=\Delta \text{ und } d_1=\delta$$

gemäss voraussetzen, so wird

$$\begin{aligned}
E&=-E_1, & E_1&=-E\\
e^0&=-\varepsilon_1^0,\ e=-\varepsilon_1, & e_1&=-\varepsilon,\ e_1^0=-\varepsilon^0,\\
a&=\alpha_1,\ a_1=\alpha, & f&=\varphi_1,\ f_1=\varphi\\
{}^*S^0&=-{}^*\Sigma_1^0,\ {}^*S=-{}^*\Sigma_1, & {}^*S_1&=-{}^*\Sigma,\ {}^*S_1^0=-{}^*\Sigma^0\\
c&=-\gamma_1,\ c_1=-\gamma, & C&=-\Gamma,
\end{aligned}$$

und es zeigt sich, dass die Gleichungen (123), (121) und (117) bezüglich mit den Gleichungen (124), (122) und (118) vollständig übereinstimmen, sowie, dass in Gleichung (120)′ die auf die erste Doppellinse sich beziehenden Glieder mit den der zweiten zugehörigen identisch sind und daher die Annullirung der ersteren erforderlich und hinreichend ist. In Rücksicht hierauf sind die gesuchten Werthe für die erste Doppellinse lediglich den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &a\left[1+\frac{E}{2-\psi}+\frac{e^0 e}{d(2-\psi)}a\right]\frac{\Delta n}{n-1}+a_1\left[1+\frac{e_1 e_1^0}{d(2-\psi)}a_1\right]\frac{\Delta n_1}{n_1-1}\\ &+\frac{e^0}{2-\psi}\frac{\Delta n}{n}-\frac{e}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n}{n}+\frac{e_1}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n_1}{n_1}=0\end{aligned}\right\}\quad(123)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n+2}{n}a\left(\frac{F}{R}\right)^2-\left[\frac{4n+4}{n}aa_1+\frac{2n+1}{n-1}a_1^2\right]\frac{F}{R}\\ &+\frac{n_1+2}{n_1}a_1\left(\frac{F}{R_1}\right)^2-\left[\frac{4n_1+4}{n_1}a_1^2-\frac{2n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right]\frac{F}{R_1}\\ &+\left[\frac{3n+2}{n}a+\frac{3n_1+2}{n_1}a_1\right]a_1^2+\left[\frac{3n+1}{n-1}a^2-\frac{3n_1+1}{n_1-1}a_1^2\right]a_1\\ &+\left[\frac{n^2}{(n-1)^2}a^3+\frac{n_1^2}{(n_1-1)^2}a_1^3\right]\\ &+2(2-\psi)^2[(E+e^0)*S^0-(E+a_1e)*S+a_1e_1*S^1]=0\end{aligned}\right\}\quad(121)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{3\psi}\left[\frac{3n+1}{n}a+\frac{3n_1+1}{n_1}a_1\right]-2(2-\psi)^2C+\frac{2-\psi}{\psi}\mathfrak{C}\\ &+\frac{n+1}{n}a\frac{F}{R}+\frac{n_1+1}{n_1}a_1\frac{F}{R_1}\\ &-\left[\frac{2n+1}{n}a+\frac{2n_1+1}{n_1}a_1\right]a_1-\frac{n}{n-1}a^2+\frac{n_1}{n_1-1}a_1^2\\ &+2\frac{2-\psi}{\psi}\frac{D}{ff_1}\left[\frac{n+1}{n}\frac{F}{R}-\frac{n_1+1}{n_1}\frac{F}{R_1}-{}^5/_6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1}\right)a_1\right.\\ &\left.-\frac{3n^2+2n+1}{6n(n-1)}a-\frac{3n_1^2+2n_1+1}{6n_1(n_1-1)}a_1\right]=0\end{aligned}\right\}\quad(117)$$

und

$$\frac{1}{nf}+\frac{1}{n_1f_1}+\frac{n-1}{n}\frac{e}{r}\frac{1}{f}+\frac{n_1-1}{n_1}\frac{e_1}{r_1}\frac{1}{f_1}=0\quad..\quad(120)$$

zu entnehmen, während die zweite Doppellinse eine der ersten symmetrische Form erhält.

Sind die Linsendicken gering, so tritt der aussergewöhnliche Fall ein, dass nach der letzten Gleichung für die Linse mit kleinerem Brechungsindex die längere Brennweite erforderlich ist. Dass trotzdem Gleichung (120) der für die chromatische Abweichung entwickelten Gleichung (123) nicht widerspricht, möge hier kurz dargethan werden; es ist dazu um so mehr Veranlassung, als gleichzeitig die Verwendung der vorstehenden Gleichungen sich ergeben wird.

Wir geben der Gleichung (120) die Form

$$\frac{1}{nf}\left(1+(n-1)\frac{e}{r}\right)+\frac{1}{n_1 f_1}\left(1+(n_1-1)\frac{e_1}{r_1}\right)=0,$$

multipliciren mit $F\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)$ und erhalten so

$$\frac{F}{nf}\left(1+\frac{E_1}{K_1}\right)\left(1+(n-1)\frac{e}{r}\right)+\frac{F}{n_1 f_1}\left(1+\frac{E}{K}\right)\left(1+(n_1-1)\frac{e_1}{r_1}\right)=0$$

oder

$$\frac{a}{n}\left(1+(n-1)\frac{e}{r}\right)+\frac{a_1}{n_1}\left(1+\frac{E}{2-\psi}\right)\left(1+(n_1-1)\frac{e_1}{r_1}\right)=0 \quad (120)$$

die Gleichung (123) kann auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} &a\left(1+\frac{E}{2-\psi}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{e}{r}\right)\frac{\Delta n}{n-1}+a_1\left(1-\frac{n_1-1}{n_1}\frac{e_1}{r_1}\right)\frac{\Delta n_1}{n_1-1}\\ &+\frac{e^0}{2-\psi}\frac{\Delta n}{n}-\frac{e}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n}{n}+\frac{e_1}{2-\psi}a_1^2\frac{\Delta n_1}{n_1}=0\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

dargestellt werden, so dass, wenn aus den beiden vorstehenden Gleichungen unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung $a+a_1=1$ und unter Vernachlässigung der Linsendicken die Grössen a und a_1 eliminirt werden,

$$\left(1+\frac{E}{2-\psi}\right)^2=\frac{n_1\Delta n_1}{n_1-1}:\frac{n\Delta n}{n-1}$$

sich ergiebt und hierauf gestützt würde Gleichung (120), eben falls in erster Annäherung

$$(a : a_1)^2 = \frac{\Delta n_1}{n_1 (n_1 - 1)} : \frac{\Delta n}{n (n - 1)}$$

und damit die Werthe a und a_1 liefern. Dass nun E, D, f und f_1 sich bestimmen und auch die Werthe $\frac{F}{R}$ und $\frac{F}{R_1}$ den Gleichungen (121) und (117) sich entnehmen lassen, dürfte eben so wenig besonders hervorzuheben sein, als wie, dass zur Correction der so gewonnenen Näherungswerthe unter Berücksichtigung der Linsendicken dieselben Gleichungen in derselben Reihenfolge zu verwenden wären.

VIERTER THEIL.

Die vorstehenden Betrachtungen haben uns in den Stand gesetzt, ein optisches System so herzustellen, dass es gewissen Anforderungen annähernd entspricht. Bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen wurde aber die sphärische Centralabweichung nur bis zur ersten Ordnung, die sphärische Randabweichung nur in der Nähe der Achse berücksichtigt und auch die Beschaffenheit der Bildfläche am Rande entzog sich der Untersuchung, wiewohl im Scheitel die sämmtlichen partiellen Bildflächen von Krümmung frei hergestellt werden konnten. Ist daher auch für das System im Grossen und Ganzen die richtige Form gewonnen, so erscheint es doch geboten, dasselbe noch zu veredeln, derart, dass immer vollständiger den aufgestellten Bedingungen durch Correction der Elemente des Systems entsprochen werde. Es ist zu dem Ende erforderlich,

> die Lage des gebrochenen Strahles aus der des einfallenden Strahles ohne Vernachlässigung abzuleiten, sowie die Veränderungen anzugeben, welche die Lage des gebrochenen Strahles erfährt, wenn die Bestimmungsstücke des einfallenden Strahles und die Elemente des Linsensystems um kleine Werthe, von welchen nur die ersten Potenzen berücksichtigt werden sollen, sich ändern.

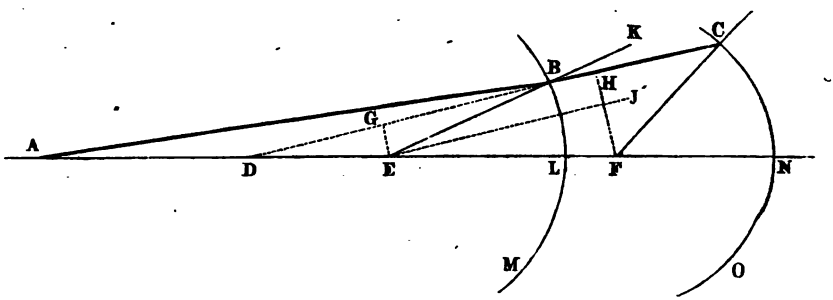
Auf Grund der Lösung dieser Aufgabe werden ersichtlich alle für das Bild aufgestellten Bedingungen sich auf lineare Bedingungsgleichungen zwischen den Correctionen der Elemente des Systems zurückführen lassen und die letzteren werden durch wiederholte Correctionen bis zu jedem beliebigen Grade der Ge-

nauigkeit bestimmt werden können. Wir haben, wie früher, zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. Der einfallende, und folglich auch jeder gebrochene Strahl liege mit der Achse des Systems in einer Ebene.

Es sei in Figur 9

Fig. 9.



BLM ein Achsenschnitt der m^{ten} brechenden Kugelfläche,
E deren Mittelpunkt,
$BE = LE = r_m$ deren Halbmesser,
AB der einfallende Strahl unter dem Winkel,
$BAL = \omega_m$,
BC der gebrochene Strahl unter dem Winkel,
$CDN = \omega_{m+1}$ gegen die Achse EF geneigt,
$ABE = \varphi_m$ der Einfalls-
$CBK = DBE = \psi_m$ der Brechungswinkel,
$1 : n_m$ das Brechungsverhältniss aus dem ersten in das zweite Mittel,
CNO der Achsenschnitt der $(m+1)^{ten}$ brechenden Kugelfläche,
F deren Mittelpunkt,
$CF = NF = r_{m+1}$ deren Halbmesser,
$DCF = \varphi_{m+1}$ der Einfallswinkel des Strahles BC an dieser Fläche,
$LN = a_{m+1}$ die Entfernung der Scheitel,
$EF = c_{m+1}$ die Entfernung der Mittelpunkte der brechenden Flächen,
EG und EH senkrecht zu DC und
EJ parallel zu DC.

Die Figur und das Brechungsgesetz ergeben dann, dass

$$EF = LN + EL - FN$$
$$\sin ABE : \sin CBK = 1 : n_m$$
$$\vee CDN = \vee BAL + \vee ABE - \vee DBE$$

und

$$HF = GE + JF$$

oder

$$CF \sin DCF = BE \sin DBE + EF \sin CDN$$

ist; werden auf diese Gleichungen die von uns eingeführten Bezeichnungen übertragen, so erhalten wir

$$c_{m+1} = a_{m+1} + r_m - r_{m+1} \quad \ldots\ldots \quad (124)$$
$$\sin \psi_m = \sin \varphi_m : n_m \quad \ldots\ldots \quad (125)$$
$$\omega_{m+1} = \omega_m + \varphi_m - \psi_m \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

und

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = r_m \sin \psi_m + c_{m+1} \sin \omega_{m+1} \quad (127)$$

Die Differentiation dieser Gleichungen liefert uns unter der Voraussetzung, dass nur der Brechungsindex sich nicht ändere,

$$\partial c_{m+1} = \partial a_{m+1} + \partial r_m - \partial r_{m+1} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$
$$\cos \psi_m \, \partial \psi_m = \cos \varphi_m \, \partial \varphi_m : n_m$$
$$\partial \omega_{m+1} = \partial \omega_m + \partial \varphi_m - \partial \psi_m$$
$$\begin{aligned} r_{m+1} \cos \varphi_{m+1} \, \partial \varphi_{m+1} = {} & r_m \cos \psi_m \, \partial \psi_m + c_{m+1} \cos \omega_{m+1} \, \partial \omega_{m+1} \\ & + \sin \psi_m \, \partial r_m - \sin \varphi_{m+1} \, \partial r_{m+1} \\ & + \sin \omega_{m+1} \, \partial c_{m+1} \end{aligned}$$

und bei weiterer Entwickelung treten an die Stelle der beiden letzteren Gleichungen

$$\partial \omega_{m+1} = \partial \omega_m + \left[\left(1 - \frac{\cos \varphi_m}{n \cos \psi_m}\right) : r_m \cos \varphi_m\right] (r_m \cos \varphi_m \, \partial \varphi_m) \quad (129)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{m+1} \cos \varphi_{m+1} \partial \varphi_{m+1}) = {} & (r_m \cos \varphi_m \partial \varphi_m) : n_m + c_{m+1} \cos \omega_{m+1} \partial \omega_{m+1} \\ & + (\sin \psi_m + \sin \omega_{m+1}) \partial r_m - (\sin \varphi_{m+1} + \sin \omega_{m+1}) \partial r_{m+1} \\ & + \sin \omega_{m+1} \, \partial a_{m+1}. \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Die Gleichungen (124) und (128) dienen dazu, den Hülfswerth c_{m+1} mit den Elementen des Systems in Beziehung zu setzen.

Nehmen wir dann zur Bestimmung des an der m^ten Kugelfläche einfallenden Strahles die Winkel ω_m und φ_m an, welche derselbe mit der Achse und dem Einfallslothe einschliesst, so ergeben sich durch Verfolg der Gleichungen (125), (126) und (127)

die entsprechenden Winkel ω_{m+1} und φ_{m1+} für den an der $(m+1)^{ten}$ Fläche einfallenden Strahl. Man wird, hierauf gestützt, aus der Lage des ersten einfallenden Strahles die Lage des durch das ganze System gebrochenen Strahles zur Bildfläche ableiten können. Ebenso gestatten die Gleichungen (129) und (130) die Bestimmung von $\partial\omega_{m+1}$ und $(r_{m+1}\cos\varphi_{m+1}\,\partial\varphi_{m+1})$ durch $\partial\omega_m$ und $(r_m\cos\varphi_m\,\partial\varphi_m)$, und die Zusammensetzung der für sämmtliche brechende Flächen entsprechend aufgestellten Gleichungen ergiebt die Aenderungen in der Lage des gebrochenen Strahles ausgedrückt durch die für den einfallenden Strahl angenommen und durch die Aenderungen der Elemente des Systems.

Die Gleichung (127) verliert ihre unmittelbare Anwendbarkeit in folgenden Fällen:

1. Wenn $r_{m+1}=\infty$, die $(m+1)^{te}$ Fläche also eben ist. Die Figur 10 lässt ersehen, dass für diesen Fall

$$\vee\ CFN=\omega_{m+1}+\varphi_{m+1}=0$$

ist. Da diese Beziehung nicht ausreicht, um den an der Ebene einfallenden Strahl festzulegen, so bezeichnen wir die Entfernung des Einfallspunktes C der $(m+1)^{ten}$ Fläche von der Achse durch y_{m+1} und haben für den vorliegenden Fall

$$\lim r_{m+1}\cdot\sin(\omega_{m+1}+\varphi_{m+1})=y_{m+1}$$

sowie

$$\cos(\omega_{m+1}+\varphi_{m+1})=1$$

zu setzen. Die Gleichung (127) geht dann über in

$$\begin{aligned}&r_{m+1}\sin[(\omega_{m+1}+\varphi_{m+1})-\omega_{m+1}]\\&=r_{m+1}[\sin(\omega_{m+1}+\varphi_{m+1})\cos\omega_{m+1}-\cos(\omega_{m+1}+\varphi_{m+1})\sin\omega_{m+1}]\\&=r_m\sin\psi_m+(a_{m+1}+r_m-r_{m+1})\sin\omega_{m+1}\end{aligned}$$

oder

$$y_{m+1}\cos\omega_{m+1}=r_m\sin\psi_m+(a_{m+1}+r_m)\sin\omega_{m+1}\quad .\quad (131)$$

und die durch Differentiation sich hieraus ergebende Gleichung

$$\begin{aligned}\cos\omega_{m+1}\,\partial y_{m+1}&=r_m\cos\psi_m\,\partial\psi_m+(a_{m+1}+r_m)\cos\omega_{m+1}\,\partial\omega_{m+1}\\&+y_{m+1}\sin\omega_{m+1}\,\partial\omega_{m+1}+(\sin\psi_m+\sin\omega_{m+1})\,\partial r_m+\sin\omega_{m+1}\,\partial a_{m+1},\end{aligned}$$

der sich auch die Form

$$\left.\begin{aligned}\partial y_{m+1}=(r_m\cos\varphi_m\,\partial\varphi):n_m\cos\omega_{m+1}+(a_{m+1}+r_m+y_{m+1}\operatorname{tg}\omega_{m+1})\partial\omega_{m+1}\\+\left(\frac{\sin\psi_m}{\cos\omega_{m+1}}+\operatorname{tg}\omega_{m+1}\right)\partial r_m+\operatorname{tg}\omega_{m+1}\,\partial a_{m+1}\end{aligned}\right\}(132)$$

geben lässt, tritt an die Stelle von Gleichung (130). Es ist zu bemerken, dass die für diesen Fall entwickelten Formeln auch

dann, wenn das Bild auf einer zur Achse senkrechten Ebene aufgefangen werden soll, zur Bestimmung der Achsenentfernung des Bildpunktes, sowie der Aenderungen, welche dieser Werth erleidet, dienen können.

2. Wenn $r_m = \infty$, die m^{te} Fläche also eben ist. Bezeichnen wir die Entfernung des Einfallspunktes B an dieser Fläche von der Achse durch y_m, so ergiebt sich unmittelbar, dass

$$\vee\ BEL = \omega_{m+1} + \psi_m = 0$$
$$\lim r_m \sin(\omega_{m+1} + \psi_m) = y_m$$

und

$$\cos(\omega_{m+1} + \psi_m) = 1$$

und es ist hiernach Gleichung (127) zu ersetzen durch

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = r_m \sin[(\omega_{m+1} + \psi_m) - \omega_{m+1}] + c_{m+1} \sin \omega_{m+1}$$
$$= r_m [\sin(\omega_{m+1} + \psi_m) \cos \omega_{m+1} - \cos(\omega_{m+1} + \psi_m) \sin \omega_{m+1}]$$
$$+ (a_{m+1} + r_m - r_{m+1}) \sin \omega_{m+1}$$

oder

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = y_m \cos \omega_{m+1} + (a_{m+1} - r_{m+1}) \sin \omega_{m+1} \quad . \quad (133)$$

Die durch Differentiation sich hieraus ergebende Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} {}_{m+1} \cos \varphi_{m+1}\, \partial\varphi_{m+1}) = \cos \omega_{m+1}\, \partial y_m + [(a_{m+1} - r_{m+1}) \cos \omega_{m+1} \\ -y_m \sin \omega_{m+1}]\, \partial\omega_{m+1} - (\sin \varphi_m + \sin \omega_{m+1})\, \partial r_{m+1} + \sin \omega_{m+1}\, \partial a_{m+1} \end{array}\right\} (134)$$

tritt für diesen Fall an die Stelle der Gleichung (130). Es ist zu bemerken, dass diese Formeln auch zur Bestimmung des ersten Einfallswinkels und seiner Aenderung verwendet werden können, wenn das Object in einer zur Achse senkrechten Ebene liegt und ein um y_m von der Achse entfernter leuchtender Punkt einen gegen die Achse unter dem Winkel ω_{m+1} geneigten Lichtstrahl aussendet.

3. Wenn $r_m = \infty$ und $r_{m+1} = \infty$ ist. Nennen wir y_m und y_{m+1} die Achsenentfernungen der Einfallspunkte in der m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Fläche, so ist

$$\vee\ BEL = \omega_{m+1} + \psi_m = 0\ ,\quad \vee\ CFN = \omega_{m+1} + \varphi_{m+1} = 0$$
$$\lim r_m \sin(\omega_{m+1} + \psi_m) = y_m\ ,\quad \lim r_{m+1} \sin(\omega_{m+1} + \varphi_{m+1}) = y_{m+1}$$
$$\cos(\omega_{m+1} + \psi_m) = 1\ ,\quad \cos(\omega_{m+1} + \varphi_{m+1}) = 1$$

und es ist hiernach Gleichung (127) zu ersetzen durch

$$r_{m+1} [\sin(\omega_{m+1} + \varphi_{m+1}) \cos \omega_{m+1} - \cos(\omega_{m+1} + \varphi_{m+1}) \sin \omega_{m+1}]$$
$$= r_m [\sin(\omega_{m+1} + \psi_m) \cos \omega_{m+1} - \cos(\omega_{m+1} + \psi_m) \sin \omega_{m+1}]$$
$$+ [a_{m+1} + r_m - r_{m+1}] \sin \omega_{m+1}$$

oder

$$y_{m+1} \cos \omega_{m+1} = y_m \cos \omega_{m+1} + a_{m+1} \sin \omega_{m+1}.$$

Wir schreiben einfacher

$$y_{m+1} = y_m + a_{m+1} \operatorname{tg} \omega_{m+1} \quad \ldots \quad (135)$$

und erhalten durch Differentiation

$$\partial y_{m+1} = \partial y_m + (a_{m+1} : \cos^2 \omega_{m+1}) \, \partial \omega_{m+1} + \operatorname{tg} \omega_{m+1} \, \partial a_{m+1} \quad (136)$$

4. Wenn der Lichtstrahl mit der Achse zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung können wir uns bei der Bestimmung der Bildörter auf die im Artikel 1 des ersten Theiles durchgeführten Rechnungen stützen und wenn wir uns der dort gebräuchlichen Bezeichnungen unter Hinzufügung der Accente m und $m+1$ bedienen, so ergiebt sich nach Gleichung (4)

$$\frac{n_m}{l_m} = \frac{1}{k_m} + \frac{n_m - 1}{r_m} \quad \ldots \quad (137)$$

und ferner

$$k_{m+1} = l_m + a_{m+1}, \quad \ldots \quad (138)$$

Beziehungen, deren Differentiation

$$\partial l_m = \frac{1}{n_m} \left(\frac{l_m}{k_m}\right)^2 \partial k_m + \frac{n_m - 1}{n_m} \left(\frac{l_m}{r_m}\right)^2 \partial r_m \quad (139)$$

und

$$\partial k_{m+1} = \partial l_m + \partial a_{m+1} \quad \ldots \quad (134)$$

liefert.

Die Aufgabe darf nunmehr als gelöst betrachtet werden, da wir von Fläche zu Fläche fortschreitend stets die Lage des Strahles und seine Aenderungen angeben können, sobald die Lage des ersten einfallenden Strahles bekannt ist. Es wird jedoch nicht überflüssig sein, in einem Beispiele die Durchführung der Rechnung zu zeigen. Wir wählen dazu, in zehnfacher Vergrösserung, das Doppelobjectiv, dessen Elemente sich auf Seite 134 in zweiter Annäherung ergeben haben, und setzen einen Strahl voraus, der unter einem Winkel $\omega = 10^0$ gegen die Achse geneigt ist, und dessen Einfallswinkel φ an der ersten Fläche gleich 2^0 vorausgesetzt werden möge. Das Bild soll aufgefangen werden auf einer zur Achse senkrechten Ebene, deren Entfernung vom letzten Flächenscheitel gleich 6. Die Genauigkeit der Rechnung ist nur durch die der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln bedingt; die siebenstelligen reichen wohl für alle Zwecke der Praxis aus. Der einfacheren Schreibweise halber bezeichnen wir durch (a) die Zahl,

deren Logarithmus gleich a ist. Wir stellen zunächst die Elemente des Systems zusammen, indem wir die aufeinanderfolgenden Flächen durch Accentuirung mit der Reihe der ganzen Zahlen unterscheiden.

$r = -5{,}970 = -(0{,}7759743)$ $\quad n = 1{,}5313 = (0{,}1850603)$

$a_1 = 0{,}7$ $\quad c_1 = -11{,}102 = -(1{,}0454012)$

$r_1 = +5{,}832 = +(0{,}7658175)$ $\quad n_1 = \frac{1{,}6385}{1{,}5315} = (0{,}0293861)$

$a_2 = 0{,}2$ $\quad c_2 = -96{,}968 = -(1{,}9866284)$

$r_2 = +103 = +(2{,}0128372)$ $\quad n_2 = \frac{1}{1{,}6385} = (-0{,}2144464)$

$a_3 = 5{,}385$ $\quad c_3 = +73{,}885 = +(1{,}8685563)$

$r_3 = +34{,}5 = +(1{,}5378191)$ $\quad n_3 = 1{,}5313 = (0{,}1850603)$

$a_4 = 0{,}6$ $\quad c_4 = +31{,}363 = +(1{,}4964176)$

$r_4 = +3{,}737 = +(0{,}5725231)$ $\quad n_4 = \frac{1}{1{,}5313} = (-0{,}1850603)$

$a_5 = 0{,}12$ $\quad c_5 = +1{,}091 = +(0{,}0378248)$

$r_5 = +2{,}766 = +(0{,}4418522)$ $\quad n_5 = 1{,}6385 = (0{,}2144464)$

$a_6 = 0{,}2$ $\quad c_6 = -1{,}178 = -(0{,}0711453)$

$r_6 = +4{,}144 = +(0{,}6174197)$ $\quad n_6 = \frac{1}{1{,}6385} = (-0{,}2144464)$

$a_7 = 6$ $\quad a_7 + r_6 = +10{,}144 = +(1{,}0062092)$

$r_7 = \infty$ (Bildfläche).

Die fortgesetzte Anwendung der Formeln (125), (126) und (127) auf alle successiven Brechungen ergiebt dann unter Zugrundelegung der Werthe $\omega = 10^0$ und $\varphi = 2^0$ die nachstehende Rechnung.

	$r \cos \varphi = -(0{,}7757097)$
$\omega = +10^0\ 0'\ 0''$	$r = -(0{,}7759743)$
$\sin \varphi = \sin +2^0\ 0'\ 0'' = +(8{,}5428192)$	$\cos \varphi = +(9{,}9997354)$
$n = (+0{,}1850603)$	$n = (+0{,}1850603)$
$\sin \psi = \sin +1^0\,18'\,21'',34 = +(8{,}3577589)$	$\cos \psi = +(9{,}9998875)$
$r = -(0{,}7759743)$	$r = -(0{,}7759743)$
$r \sin \psi = -0{,}1360608 = -(9{,}1337332)$	$nr \cos \psi = -(0{,}9609221)$
$\sin \omega_1 = \sin +10^0\,41'\,38'',66 = +(9{,}2684959)$	$\cos \omega_1 = +(9{,}9923909)$
$c_1 = -(1{,}0454012)$	$c_1 = -(1{,}0454012)$
$c_1 \sin \omega_1 = -2{,}0601417 = -(0{,}3138971)$	$c_1 \cos \omega_1 = -(1{,}0377921)$

$r_1 \sin \varphi_1 = -2{,}1962025 = -(0{,}3416724)$ $r_1 \cos \varphi_1 = +(0{,}7326090)$

$r_1 = +(0{,}7658175)$ $r_1 = +(0{,}7658175)$

$\sin \varphi_1 = \sin -22^0\,7'\,18'',75 = -(9{,}5758549)$ $\cos \varphi_1 = +(9{,}9667915)$

$n_1 = (+0{,}0293861)$ $n_1 = (+0{,}0293861)$

$\sin \psi_1 = \sin -20^0\,36'\,21'',70 = -(9{,}5464688)$ $\cos \psi_1 = +(9{,}9712863)$

$r_1 = +(0{,}7658175)$ $r_1 = +(0{,}7658175)$

$r_1 \sin \psi_1 = -2{,}052515 = -(0{,}3122863)$ $n_1 r_1 \cos \psi_1 = +(0{,}7664899)$

$\sin \omega_2 = \sin +9^0\,10'\,41'',61 = +(9{,}2027771)$ $\cos \omega_2 = +(9{,}9944039)$

$c_2 = -(1{,}9866284)$ $c_2 = -(1{,}9866284)$

$c_2 \sin \omega_2 = -15{,}466979 = -(1{,}1894055)$ $c_2 \cos \omega_2 = -(1{,}9810323)$

$r_2 \sin \varphi_2 = -17{,}519494 = -(1{,}2435216)$ $r_2 \cos \varphi_2 = +(2{,}0064621)$

$r_2 = +(2{,}0128372)$ $r_2 = +(2{,}0128372)$

$\sin \varphi_2 = \sin -9^0\,47'\,35'',45 = -(9{,}2306844)$ $\cos \varphi_2 = +(9{,}9936249)$

$n_2 = (-0{,}2144464)$ $n_2 = (-0{,}2144464)$

$\sin \psi_2 = \sin -16^0\,10'\,56'',63 = -(9{,}4451308)$ $\cos \psi_2 = +(9{,}9824429)$

$r_2 = +(2{,}0128372)$ $r_2 = +(2{,}0128372)$

$r_2 \sin \psi_2 = -28{,}705689 = -(1{,}4579680)$ $n_2 r_2 \cos \psi_2 = +(1{,}7808337)$

$\sin \omega_3 = \sin +15^0\,34'\,2'',79 = +(9{,}4287380)$ $\cos \omega_3 = +(9{,}9837685)$

$c_3 = +(1{,}8685563)$ $c_3 = +(1{,}8685563)$

$c_3 \sin \omega_3 = +19{,}828703 = +(1{,}2972943)$ $c_3 \cos \omega_3 = +(1{,}8523248)$

$r_3 \sin \varphi_3 = -8{,}876986 = -(0{,}9482655)$ $r_3 \cos \varphi_3 = +(1{,}5229448)$

$r_3 = +(1{,}5378191)$ $r_3 = +(1{,}5378191)$

$\sin \varphi_3 = \sin -14^0\,54'\,36'',52 = -(9{,}4104464)$ $\cos \varphi_3 = +(9{,}9851257)$

$n_3 = (+0{,}1850603)$ $n_3 = (+0{,}1850603)$

$\sin \psi_3 = \sin -9^0\,40'\,23'',81 = -(9{,}2253861)$ $\cos \psi_3 = +(9{,}9937808)$

$r_3 = +(1{,}5378191)$ $r_3 = +(1{,}5378191)$

$r_3 \sin \psi_3 = -5{,}7970253 = -(0{,}7632052)$ $n_3 r_3 \cos \psi_3 = +(1{,}7166602)$

$\sin \omega_4 = \sin +10^0\,19'\,50'',08 = +(9{,}2536463)$ $\cos \omega_4 = +(9{,}9929022)$

$c_4 = +(1{,}4964176)$ $c_4 = +(1{,}4964176)$

$c_4 \sin \omega_4 = +5{,}6242403 = +(0{,}7500639)$ $c_4 \cos \omega_4 = +(1{,}4893198)$

$r_4 \sin \varphi_4 = -0{,}1727850 = -(9{,}2375060)$ $r_4 \cos \varphi_4 = +(0{,}5720586)$

$r_4 = +(0{,}5725231)$ $r_4 = +(0{,}5725231)$

$\sin \varphi_4 = \sin -2^0\,39'\,0'',32 = -(8{,}6649829)$ $\cos \varphi_4 = +(9{,}9995355)$

$n_4 = (-0{,}1850603)$ $n_4 = (-0{,}1850603)$

$\sin \psi_4 = \sin -4^0\,3'\,36'',11 = -(8{,}8500432)$ $\cos \psi_4 = +(9{,}9989088)$

$r_4 = +(0{,}5725231)$ $r_4 = +(0{,}5725231)$

$r_4 \sin \psi_4 = -0{,}26458567 = -(9{,}4225663)$ $n_4 r_4 \cos \psi_4 = +(0{,}3863716)$

$\sin\omega_5 = \sin + 11^0\,44'\,25'',87 = +(9,3085212)$ $\quad \cos\omega_5 = +(9,9908178)$

$c_5 = +(0,0378248)$ $\quad c_5 = +(0,0378248)$

$c_5 \sin\omega_5 = +0,22199643 = +(9,3463460)$ $\quad c_5\cos\omega_5 = +(0,0286426)$

$r_5 \sin\varphi_5 = -0,04258924 = -(8,6292998)$ $\quad r_5\cos\varphi_5 = +(0,4418007)$

$r_5 = +(0,4418522)$ $\quad r_5 = +(0,4418522)$

$\sin\varphi_5 = \sin - 0^0\,52'\,56'',07 = -(8,1874476)$ $\quad \cos\varphi_5 = +(9,9999485)$

$n_5 = (+0,2144464)$ $\quad n_5 = (+0,2144464)$

$\sin\psi_5 = \sin - 0^0\,32'\,18'',35 = -(7,9730012)$ $\quad \cos\psi_5 = +(9,9999808)$

$r_5 = +(0,4418522)$ $\quad r_5 = +(0,4418522)$

$r_5 \sin\psi_5 = -0,0259928 = -(8,4148534)$ $\quad n_5 r_5 \cos\psi_5 = +(0,6562794)$

$\sin\omega_6 = \sin + 11^0\,23'\,48'',15 = +(9,2957892)$ $\quad \cos\omega_6 = +(9,9913513)$

$c_6 = -(0,0711453)$ $\quad c_6 = -(0,0711453)$

$c_6 \sin\omega_6 = -0,2327740 = -(9,3669345)$ $\quad c_6\cos\omega_6 = -(0,0624966)$

$r_6 \sin\varphi_6 = -0,2587668 = -(9,4129085)$ $\quad r_6\cos\varphi_6 = +(0,6165713)$

$r_6 = +(0,6174197)$ $\quad r_6 = +(0,6174197)$

$\sin\varphi_6 = \sin - 3^0\,34'\,48'',33 = -(8,7954888)$ $\quad \cos\varphi_6 = +(9,9991516)$

$n_6 = (-0,2144464)$ $\quad n_6 = (-0,2144464)$

$\sin\psi_6 = \sin - 5^0\,52'\,20'',78 = -(9,0099352)$ $\quad \cos\psi_6 = +(9,9977149)$

$r_6 = +(0,6174197)$ $\quad r_6 = +(0,6174197)$

$r_6 \sin\psi_6 = -0,4239893 = -(9,6273549)$ $\quad n_6 r_6 \cos\psi_6 = +(0,4006882)$

$\cos\omega_7 = \cos + 13^0\,41'\,20'',60 = +(9,9874850)$

$\frac{r_6 \sin\psi_6}{\cos\omega_7} = -0,4363851 = -(9,6398699)$

$\sin\psi_6 : \cos\omega_7 = -0,1053053 = -(9,0224502)$

$\operatorname{tg}\omega_7 = \operatorname{tg} + 13^0\,41'\,20'',60 = +(9,3866262)$ $\quad \cos\omega_7 = +(9,9874850)$

$a_7 + r_6 = +(1,0062092)$ $\quad n_6 = (-0,2144464)$

$[a_7 + r_6]\operatorname{tg}\omega_7 = +2,4707875 = +(0,3928354)$ $\quad 1 : n_6\cos\omega_7 = +(0,2269614)$

$y_7 = +2,0344024 = +(0,3084368)$

$\operatorname{tg}\omega_7 = \operatorname{tg} + 13^0\,41'\,20,60'' = +(9,3866262)$

$y_7 \operatorname{tg}\omega_7 = +0,495522 = +(9,6950630)$

Die vorstehend durchgeführte Rechnung hat zunächst den Durchschnitt des gebrochenen Strahles mit der Bildfläche vermittelst des Werthes

$$y_7 = +2,0344024,$$

ausserdem aber auch genügende Anhaltspunkte ergeben, um die

Beziehungen zwischen den Aenderungen aufstellen zu können. Es ist nämlich

$$\partial\omega_1 = \partial\omega - (8{,}7648560)\, r \cos\varphi\, \partial\varphi$$

$$r_1 \cos\varphi_1\, \partial\varphi_1 = (-0{,}1850603)\, r \cos\varphi\, \partial\varphi - (1{,}0377921)\, \partial\omega_1 + A$$

oder

$$\partial\omega_1 = \partial\omega + (9{,}5405652)\, \partial\varphi$$

$$r_1 \cos\varphi_1\, \partial\varphi_1 = -(0{,}5906494)\, \partial\varphi - (1{,}0377921)\, \partial\omega_1 + A$$

$$\partial\omega_2 = \partial\omega_1 + (8{,}1427318)\, r_1 \cos\varphi_1\, \partial\varphi_1$$

$$r_2 \cos\varphi_2\, \partial\varphi_2 = +(-0{,}0293861) r_1 \cos\varphi_1\, \partial\varphi_1 - (1{,}9810323)\partial\omega_2 + A_1$$

$$\partial\omega_3 = \partial\omega_2 - (7{,}8268348)\, r_2 \cos\varphi_2\, \partial\varphi_2$$

$$r_3 \cos\varphi_3\, \partial\varphi_3 = +(+0{,}2144464)\, r_2 \cos\varphi_2\, \partial\varphi_2 + (1{,}8523248)\partial\omega_3 + A_2$$

$$\partial\omega_4 = \partial\omega_3 + (8{,}0331715)\, r_3 \cos\varphi_3\, \partial\varphi_3$$

$$r_4 \cos\varphi_4\, \partial\varphi_4 = +(-0{,}1850603)\, r_3 \cos\varphi_3\, \partial\varphi_3 + (1{,}4893198)\, \partial\omega_4 + A_3$$

$$\partial\omega_5 = \partial\omega_4 - (9{,}1550850)\, r_4 \cos\varphi_4\, \partial\varphi_4$$

$$r_5 \cos\varphi_5\, \partial\varphi_5 = +(+0{,}1850603)\, r_4 \cos\varphi_4\, \partial\varphi_4 + (0{,}0286426)\, \partial\omega_5 + A_4$$

$$\partial\omega_6 = \partial\omega_5 + (9{,}1489642)\, r_5 \cos\varphi_5\, \partial\varphi_5$$

$$r_6 \cos\varphi_6\, \partial\varphi_6 = +(-0{,}2144464)\, r_5 \cos\varphi_5\, \partial\varphi_5 - (0{,}0624966)\partial\omega_6 + A_5$$

$$\partial\omega_7 = \partial\omega_6 - (9{,}1922669)\, r_6 \cos\varphi_6\, \partial\varphi_6$$

$$\partial y_7 = +(0{,}2269614)\, r_6 \cos\varphi_6\, \partial\varphi_6 + (1{,}0269221)\, \partial\omega_7 + A_6$$

zu setzen, wenn wir unter A, A_1 etc. die durch die Gleichungen

$$A = +(8{,}3577589)\partial r + (9{,}2684959)\partial r + (9{,}5758549)\partial r_1 - (9{,}2684959)\partial r + (9{,}2684959)\partial a$$

$$A_1 = -(9{,}5464688)\partial r_1 + (9{,}2027771)\partial r_1 + (9{,}2306844)\partial r_2 - (9{,}2027771)\partial r + (9{,}2027771)\partial a$$

$$A_2 = -(9{,}4451308)\partial r_2 + (9{,}4287380)\partial r_2 + (9{,}4104464)\partial r_3 - (9{,}4287380)\partial r + (9{,}4287380)\partial a$$

$$A_3 = -(9{,}2253861)\partial r_3 + (9{,}2536463)\partial r_3 + (8{,}6649829)\partial r_4 - (9{,}2536463)\partial r + (9{,}2536463)\partial a$$

$$A_4 = -(8{,}8500432)\partial r_4 + (9{,}3085212)\partial r_4 + (8{,}1874476)\partial r_5 - (9{,}3085212)\partial r + (9{,}3085212)\partial a$$

$$A_5 = -(7{,}9730012)\partial r_5 + (9{,}2957892)\partial r_5 + (8{,}7954888)\partial r_6 - (9{,}2957892)\partial r + (9{,}2957892)\partial a$$

$$A_6 = -(9{,}0224502)\partial r_6 + (9{,}3866262)\partial r_6 + (9{,}3866262)\partial a$$

bestimmten Werthe verstehen. Eliminiren wir aus der vorigen Gruppe von Gleichungen

$$\begin{array}{ll} & \partial\omega_7 \\ r_6 \cos\varphi_6\,\partial\varphi_6 & \partial\omega_6 \\ r_5 \cos\varphi_5\,\partial\varphi_5 & \partial\omega_5 \\ r_4 \cos\varphi_4\,\partial\varphi_4 & \partial\omega_4 \\ r_3 \cos\varphi_3\,\partial\varphi_3 & \partial\omega_3 \\ r_2 \cos\varphi_2\,\partial\varphi_2 & \partial\omega_2 \\ r_1 \cos\varphi_1\,\partial\varphi_1 & \partial\omega_1, \end{array}$$

so resultirt

$$\begin{aligned} \partial y_7 = {} & 11{,}84720\,\partial\omega + 0{,}759651\,\partial\varphi \\ & + (9{,}9348564)A + (9{,}7819797)A_1 + (9{,}8412211)A_2 \\ & + (9{,}7557262)A_3 + (0{,}1797472)A_4 + (8{,}4758484)A_5 + A_6, \end{aligned}$$

und wenn die für A, A_1 etc. angegebenen Werthe hier eingeführt werden,

$$\begin{aligned} \partial y_7 = {} & 11{,}84720\,\partial\omega + 0{,}759651\,\partial\varphi \\ & + 0{,}1793352\,\partial r + 0{,}0479258\,\partial r_1 - 0{,}0007544\,\partial r_2 \\ & - 0{,}0012417\,\partial r_3 + 0{,}1248637\,\partial r_4 - 0{,}2788788\,\partial r_5 + 0{,}1342231\,\partial r_6 \\ & + 0{,}1597188\,\partial a_1 + 0{,}0965506\,\partial a_2 + 0{,}1861912\,\partial a_3 \\ & + 0{,}1021816\,\partial a_4 + 0{,}3077999\,\partial a_5 + 0{,}0059108 19\,\partial a_6 + 0{,}2435713\,\partial a_7. \end{aligned}$$

2. Der einfallende und folglich auch jeder gebrochene Strahl sei windschief zur Achse des Systems.

Es sei in Figur 11 (a. f. S.)

E der Mittelpunkt der m^{ten} brechenden Kugelfläche,

$BE = r_m$ deren Halbmesser,

AB der an dieser Fläche einfallende Strahl, unter dem spitzen Winkel ω_m,

BC der gebrochene Strahl, unter dem spitzen Winkel ω_{m+1} gegen EF, die Achse des Systems, geneigt;

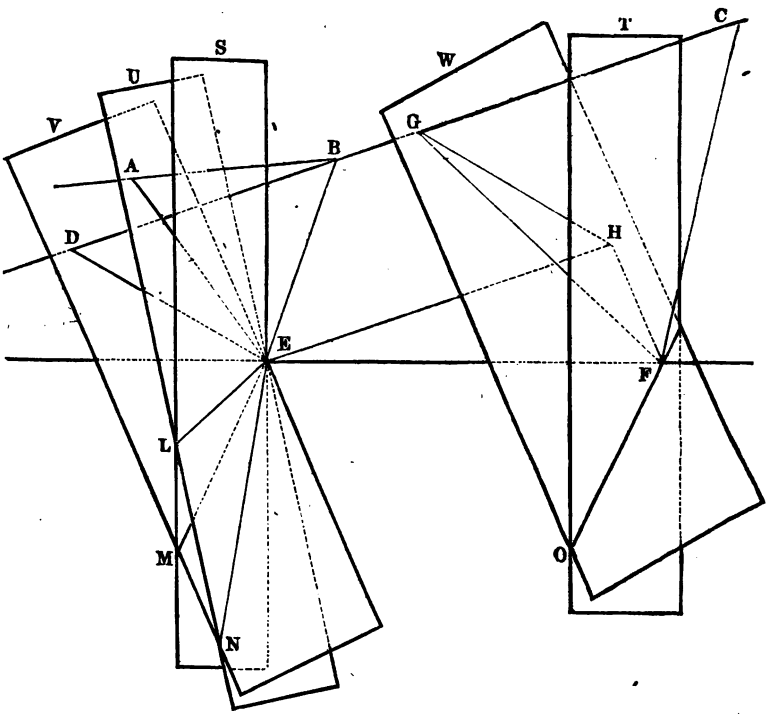
$ABE = \varphi_m$ der Einfalls-,

$DBE = \psi_m$ der Brechungswinkel,

$1 : n_m$ das Brechungsverhältniss der Mittel vor und hinter der m^{ten} Fläche,

F der Mittelpunkt der $(m+1)^{ten}$ brechenden Kugelfläche,
$EF = r_{m+1}$ deren Halbmesser,

Fig. 11.



$DCF = \varphi_{m+1}$ der Einfallswinkel des Strahles BC an dieser Fläche,
a_{m+1} die Entfernung der Scheitel,
$EF = c_{m+1} = a_{m+1} + r_m - r_{m+1}$ die Entfernung der Mittelpunkte der brechenden Flächen.
Durch den Mittelpunkt E der m^{ten} brechenden Fläche führen wir die Ebene S, senkrecht zur Achse EF,
die Ebene U, senkrecht zum einfallenden Strahle AB, denselben in A durchschneidend,
die Ebene V, senkrecht zum gebrochenen Strahle BC, dessen Verlängerung in D treffend;
der Durchschnitt dieser drei Ebenen erfolge in den Geraden LE, ME und NE.

Durch den Mittelpunkt F der $(m+1)^{ten}$ brechenden Fläche führen wir

die Ebene T, senkrecht zur Achse EF,

die Ebene W, senkrecht zu dem an dieser Fläche einfallenden Strahle BC, denselben in G treffend.

Der Durchschnitt beider Ebenen erfolge in der Geraden OF.

Es sei ferner

$AEL = \lambda_m$,

$DEM = \mu_m$,

$HFO = \lambda_{m+1}$,

θ_m der Winkel, welchen LE,

θ_{m+1} der Winkel, welchen OF mit irgend einer festen, die Achse EF enthaltenden Ebene bildet.

Zur Bestimmung des an der m^{ten} brechenden Fläche einfallenden Strahles AB mögen die Werthe

$$\theta_m,\ \omega_m,\ \lambda_m,\ \varphi_m$$

gegeben sein; unsere Aufgabe ist gelöst, sobald wir die Werthe

$$\theta_{m+1},\ \omega_{m+1},\ \lambda_{m+1},\ \varphi_{m+1},$$

von welchen die Lage des an der $(m+1)^{ten}$ Fläche einfallenden Strahles abhängt, auf jene gegebenen zurückgeführt haben.

Die Figur ergiebt unmittelbar, dass $S \parallel T$, $V \parallel W$ und folglich $ME \parallel OF$ ist. Da dann ME und OF gleiche Neigung gegen die feste Ebene haben, so ist $MEL = \theta_{m+1} - \theta_m$.

Die Ebenen U und V schliessen mit S die Winkel ω_m resp. ω_{m+1}, mit einander aber den Winkel $ABD = \varphi_m - \psi_m$ ein; ebenso ist W gegen T unter dem Winkel ω_{m+1} geneigt. Dem Brechungsgesetze zufolge liegen AB, BC und EB in einer Ebene; da zu dieser Ebene U und V, und folglich auch NE senkrecht ist, so ergiebt sich für die Winkel DEN und AEN der Werth 90^0.

Die dreiseitige Ecke E (LMN) hat danach folgende Bestandtheile

Keil $N\ (LE)\ M = \omega_m$	,	Seite $NEM = 90^0 - \mu_m$
„ $L\ (ME)\ N = 180^0 - \omega_{m+1}$	,	„ $LEN = 90^0 - \lambda_m$
„ $M(NE)\ L = \varphi_m - \psi_m$	,	„ $MEL = \theta_{m+1} - \theta_m$.

Die Figur lässt ferner ersehen, dass HF senkrecht zu OF, und GH parallel und gleich DE ist; die Bestandtheile des Dreiecks GHF sind daher die folgenden

Winkel $GHF = 90^0 + \mu_m$, Seite $GF = r_{m+1} \sin \varphi_{m+1}$
„ $HFG = 90^0 - \lambda_{m+1}$, „ $HG = r_m \sin \psi_m$
„ $FGH = \lambda_{m+1} - \mu_m$, „ $FH = c_{m+1} \sin \omega_{m+1}$.

Das Brechungsgesetz liefert uns die Beziehung

$$\sin DBE : \sin ABE = 1 : n_m,$$

oder

$$\sin \psi_m = \sin \varphi_m : n_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Von der körperlichen Ecke $E\ (LMN)$ sind danach die Keile $N\,(LE)\,M$, $M\,(NE)\,L$ und die Seite LEN bekannt, so dass die Berechnung der übrigen Stücke erfolgen kann. Wir erhalten zunächst

$$\cos L(ME)N = \sin N(LE)M \sin M(NE)L \cos LEN - \cos N(LE)M \cos M(NE)L$$

oder nach unseren Bezeichnungen

$$\cos (180^0 - \omega_{m+1}) = \sin \omega_m \sin (\varphi_m - \psi_m) \cos (90^0 - \lambda_m) - \cos \omega_m \cos (\varphi_m - \psi_m),$$

$$\cos \omega_{m+1} = \cos \omega_m \cos (\varphi_m - \psi_m) - \sin \omega_m \sin (\varphi_m - \psi_m) \sin \lambda_m$$

und, für die praktische Rechnung bequemer

$$\left.\begin{aligned} \cos \omega_{m+1} &= \cos (\omega_m - \varphi_m + \psi_m) \\ &\quad - 2 \sin \omega_m \sin (\varphi_m - \psi_m) \cos^2 (45^0 - {}^1/_2\, \lambda_m) \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\sin NEM}{\sin N(LE)M} = \frac{\sin MEL}{\sin M(NE)L} = \frac{\sin LEN}{\sin L(ME)N}$$

oder nach unseren Bezeichnungen

$$\frac{\sin (90^0 - \mu_m)}{\sin \omega_m} = \frac{\sin (\theta_{m+1} - \theta_m)}{\sin (\varphi_m - \psi_m)} = \frac{\sin (90^0 - \lambda_m)}{\sin (180^0 - \omega_{m+1})},$$

und endlich

$$\frac{\cos \mu_m}{\sin \omega_m} = \frac{\sin (\theta_{m+1} - \theta_m)}{\sin (\varphi_m - \psi_m)} = \frac{\cos \lambda_m}{\sin \omega_{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Die Bestimmung von $\theta_{m+1} - \theta_m$ und μ_m aus diesen Gleichungen ist derart vorzunehmen, dass $-90^0 < \theta_{m+1} - \theta_m < 90^0$, und die Vorzeichen von μ_m und λ_m übereinstimmen.

Noch bequemer wird die Rechnung unter Anwendung der Neper'schen Analogien. Diese liefern

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\,[NEM+MEL] = \frac{\cos {}^1/_2\,[N(LE)M - M(NE)L]}{\cos {}^1/_2\,[N(LE)M + M(NE)L]} \operatorname{tg} {}^1/_2 LEN,$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\,[NEM-MEL] = \frac{\sin {}^1/_2\,[N(LE)M - M(NE)L]}{\sin {}^1/_2\,[N(LE)M + M(NE)L]} \operatorname{tg} {}^1/_2\, LEN$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} {}^1/_2\,[(90^0 - \mu_m) + (\theta_{m+1} - \theta_m)] \\ &= \frac{\cos {}^1/_2\,[\omega_m - \varphi_m + \psi_m]}{\cos {}^1/_2\,[\omega_m + \varphi_m - \psi_m]} \operatorname{tg} {}^1/_2\,(90^0 - \lambda_m) \\ &\operatorname{tg} {}^1/_2\,[(90^0 - \mu_m) - (\theta_{m+1} - \theta_m)] \\ &= \frac{\sin {}^1/_2\,[\omega_m - \varphi_m + \psi_m]}{\sin {}^1/_2\,[\omega_m + \varphi_m - \psi_m]} \operatorname{tg} {}^1/_2\,(90^0 - \lambda_m) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

und sind zur nachträglichen Berechnung von ω_{m+1} durch eine der in (142) enthaltenen Gleichungen zu ergänzen.

Vom Dreiecke FGH sind durch die vorstehenden Gleichungen die Seiten HG, FH und der Winkel GHF bestimmt. Die Berechnung der fehlenden Stücke liefert

$$\begin{aligned} GF \cos HFG &= -\,HG \cos GHF + FH \\ GF \sin HFG &= HG \sin GHF \end{aligned}$$

oder nach unseren Bezeichnungen

$$\begin{aligned} &r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} \cos (90^0 - \lambda_{m+1}) \\ &= -\,r_m \sin \psi_m \cos (90^0 + \mu_m) + c_{m+1} \sin \omega_{m+1} \end{aligned}$$

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} \sin (90^0 - \lambda_{m+1}) = r_m \sin \psi_m \sin (90^0 + \mu_m)$$

und danach

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} \sin \lambda_{m+1} = r_m \sin \psi_m \sin \mu_m + c_{m+1} \sin \omega_{m+1} \quad (144)$$

$$r_{m+1} \sin \varphi_{m+1} \cos \lambda_{m+1} = r_m \sin \psi_m \cos \mu_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Da φ_{m+1} stets positiv, so kann über Grösse und Vorzeichen des Winkels λ_{m+1} kein Zweifel obwalten.

Bequemer wird die Rechnung, wenn zuerst die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2\,[HFG - FGH]}{\operatorname{tg} {}^1/_2\,[HFG + FGH]} = \frac{HG - FH}{HG + FH}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\operatorname{tg}\,{}^1/_2\,[90^0+\mu_m-2\,\lambda_{m+1}]}{\operatorname{tg}\,{}^1/_2\,[90^0-\mu_m]}\\ &=\frac{r_m\sin\psi_m-c_{m+1}\sin\omega_{m+1}}{r_m\sin\psi_m+c_{m+1}\sin\omega_{m+1}}=\operatorname{tg}(45^0-\varkappa),\\ \text{wo}\quad &\operatorname{tg}\varkappa=\frac{c_{m+1}\sin\omega_{m+1}}{r_m\sin\psi_m},\end{aligned}\right\}\quad(146)$$

zur Bestimmung von λ_{m+1} und dann Gleichung (145) zur Ausmittelung von φ_{m+1} verwendet wird.

Die vorstehenden Gleichungen genügen, um die Lage des an der $(m+1)^{ten}$ Fläche einfallenden Strahles zu bestimmen; sie sind noch zu differenziren, wenn die Aenderungen, welche die Lage dieses Strahles erleidet, mit den Aenderungen der Bestimmungsstücke des vorigen Strahles und denen der Elemente des Systems in Zusammenhang gebracht werden sollen. Dabei möge der Brechungsindex als constant betrachtet werden.

Die Gleichung (140) ergiebt wie früher

$$\cos\psi_m\,\partial\psi_m=\cos\varphi_m\,\partial\varphi_m:n_m;\quad\ldots\ldots\quad(147)$$

aus Gleichung (141) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}&\sin\omega_{m+1}\,\partial\omega_{m+1}\\ =&[\sin(\omega_m+\varphi_m-\psi_m)-2\cos\omega_m\sin(\varphi_m-\psi_m)\sin^2(45^0-{}^1/_2\,\lambda_m)]\,\partial\omega_m\\ +&[\sin(\omega_m+\varphi_m-\psi_m)-2\sin\omega_m\cos(\varphi_m-\psi_m)\sin^2(45^0-{}^1/_2\,\lambda_m)]\\ &\qquad\qquad(\partial\varphi_m-\partial\psi_m)\\ +&\sin\omega_m\sin(\varphi_m-\psi_m)\cos\lambda_m\,\partial\lambda_m\end{aligned}\right\}\quad(148)$$

und dann aus den Gleichungen (142)

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}\mu_m\,\partial\mu_m+\operatorname{cotg}\omega_m\,\partial\omega_m\\ =&\operatorname{cotg}(\varphi_m-\psi_m)(\partial\varphi_m-\partial\psi_m)-\operatorname{cotg}(\delta_{m+1}-\theta_m)(\partial\theta_{m+1}-\partial\theta_m)\\ =&\operatorname{tg}\lambda_m\,\partial\lambda_m+\operatorname{cotg}\omega_{m+1}\,\partial\omega_{m+1}.\end{aligned}\right\}\quad(149)$$

Für den Fall, dass die Gleichungen (143) zur Berechnung von μ_m und $\theta_{m+1}-\theta_m$ verwendet worden, erhalten wir aus diesen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mu_m - \partial\theta_{m+1} + \partial\theta_m}{\cos(\mu_m - \theta_{m+1} + \theta_m)} \\ = &\frac{\partial\lambda_m}{\cos\lambda_m} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin(\varphi_m - \psi_m)\,\partial\omega_m + \sin\omega_m(\partial\varphi_m - \partial\psi_m)}{\cos\tfrac{1}{2}[\omega_m + \varphi_m - \psi_m]\cos\tfrac{1}{2}[\omega_m - \varphi_m + \psi_m]} \\ &\frac{\partial\mu_m + \partial\theta_{m+1} - \partial\theta_m}{\cos(\mu_m + \theta_{m+1} - \theta_m)} \\ = &\frac{\partial\lambda_m}{\cos\lambda_m} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin(\varphi_m - \psi_m)\,\partial\omega_m - \sin\omega_m(\partial\varphi_m - \partial\psi_m)}{\sin\tfrac{1}{2}[\omega_m + \varphi_m - \psi_m]\sin\tfrac{1}{2}[\omega_m - \varphi_m + \psi_m]}. \end{aligned}\right\} (150)$$

Nachdem vorstehende Gleichungen $\partial\mu_m$ und $\partial\theta_{m+1} - \partial\theta_m$ ergeben haben, ist die Bestimmung von $\partial\omega_{m+1}$ mit Hülfe der Gleichungen (149) auszuführen.

Wir wenden uns zu den Gleichungen (144) und (145), und ersehen, dass, wenn $\partial\lambda_{m+1}$ und $\partial\varphi_{m+1}$ einzeln berechnet werden sollen,

$$\left.\begin{aligned} &r_{m+1}\sin\varphi_{m+1}\,\partial\lambda_{m+1} \\ = &\,r_m\sin\psi_m\cos(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial\mu_m \\ - &\,r_m\cos\psi_m\sin(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial\psi_m - \sin\psi_m\sin(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial r_m \\ + &\,c_{m+1}\cos\omega_{m+1}\cos\lambda_{m+1}\,\partial\omega_{m+1} + \sin\omega_{m+1}\cos\lambda_{m+1}\,\partial c_{m+1} \end{aligned}\right\} (151)$$

$$\left.\begin{aligned} &r_{m+1}\cos\varphi_{m+1}\,\partial\varphi_{m+1} \\ = &\,r_m\sin\psi_m\sin(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial\mu_m - \sin\varphi_{m+1}\,\partial r_{m+1} \\ + &\,r_m\cos\psi_m\cos(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial\psi_m + \sin\psi_m\cos(\lambda_{m+1} - \mu_m)\,\partial r_m \\ + &\,c_{m+1}\cos\omega_{m+1}\sin\lambda_{m+1}\,\partial\omega_{m+1} + \sin\omega_{m+1}\sin\lambda_{m+1}\,\partial c_{m+1} \end{aligned}\right\} (152)$$

sich ergiebt, während Gleichung (145) allein auch

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{cotg}\varphi_{m+1}\,\partial\varphi_{m+1} - \operatorname{tg}\lambda_{m+1}\,\partial\lambda_{m+1} + \partial r_{m+1} : r_{m+1} \\ = &\operatorname{cotg}\psi_m\,\partial\psi_m \quad - \operatorname{tg}\mu_m\,\partial\mu_m \quad + \partial r_m : r_m \end{aligned}\right\} . \quad (153)$$

geliefert hätte. Wird aber den Gleichungen (146) der Vorzug gegeben, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\,\partial\lambda_{m+1} - \partial\mu_m}{\cos(2\lambda_{m+1} - \mu_m)} = \frac{\partial\mu_m}{\cos\mu_m} + \frac{\partial\varkappa}{\sin(45^0 - \varkappa)} \\ &\frac{2\,\partial\varkappa}{\sin 2\varkappa} = -\operatorname{cotg}\psi_m\,\partial\psi_m + \operatorname{cotg}\omega_{m+1}\,\partial\omega_{m+1} - \frac{\partial r_m}{r_m} + \frac{\partial c_{m+1}}{c_{m+1}} \end{aligned}\right\} (154)$$

Einige der vorstehenden Formeln verlieren ihre unmittelbare Anwendbarkeit in folgenden Fällen:

1. Wenn $r_{m+1} = \infty$, die $(m+1)^{te}$ Fläche also eben ist. Um den hier einfallenden Strahl, dessen Richtung durch die wie bisher zu berechnenden Grössen ω_{m+1} und θ_{m+1} bestimmt ist, vollends festzulegen, bezeichnen wir die Entfernung des Einfallspunktes C (Fig. 11) von der Achse durch y_{m+1} und die Neigung dieser Linie gegen die feste Ebene durch η_{m+1}. Legen wir nun durch EM und OF eine Ebene, und dann eine solche, die den Strahl DC enthält und zur Achse parallel ist, so ist leicht zu ersehen, dass für den vorliegenden Grenzfall

$$\omega_{m+1} - \varphi_{m+1} = 0\ , \quad \cos(\omega_{m+1} - \varphi_{m+1}) = 1,$$
$$\lim r_{m+1} \sin(\omega_{m+1} - \varphi_{m+1}) = y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})$$
$$\lambda_{m+1} = 90^0$$

zu setzen ist. Die Gleichung (144) geht dann über in

$$\left.\begin{aligned} &y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) \cos \omega_{m+1} \\ &\quad = r_m \sin \psi_m \sin \mu_m + (a_{m+1} + r_m) \sin \omega_{m+1}. \end{aligned}\right\} \quad (144)$$

Die Seiten der Gleichung (145) stellen, wie sich aus Fig. 11 ergiebt, die kürzeste Entfernung des Strahles BC von der Achse des Systems dar; da dieselbe Entfernung sich nun auch durch $y_{m+1} \cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})$ angeben lässt, so ist Gleichung (145) zu ersetzen durch

$$y_{m+1} \cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) = r_m \sin \psi_m \cos \mu_m \quad . \quad . \quad (145)$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) \cos \omega_{m+1}\, \partial y_{m+1} \\ &+ y_{m+1} \cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) \cos \omega_{m+1} (\partial\theta_{m+1} - \partial\eta_{m+1}) \\ &= [(a_{m+1} + r_m) \cos \omega_{m+1} + y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) \sin \omega_{m+1}]\, \partial\omega_{m+1} \\ &+ r_m \sin \psi_m \cos \mu_m\, \partial\mu_m + r_m \cos \psi_m \sin \mu_m\, \partial\psi_m \\ &+ \sin \omega_{m+1} (\partial a_{m+1} + \partial r_m) + \sin \mu_m \cos \psi_m\, \partial r_m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})\, \partial y_{m+1} - y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) (\partial\theta_{m+1} - \partial\eta_{m+1}) \\ &= r_m \sin \psi_m \sin \mu_m\, \partial\mu_m + r_m \cos \psi_m \cos \mu_m\, \partial\psi_m + \cos \mu_m \cos \psi_m\, \partial r_m. \end{aligned}$$

Es verdient erwähnt zu werden, dass die für diesen Fall entwickelten Formeln auch dann, wenn das Bild auf einer zur Achse senkrechten Ebene aufgefangen werden soll, zur Bestimmung des

Bildpunktes, sowie der Aenderungen, welche seine Lage erleidet, geeignet sind;

2. Wenn $r_m = \infty$, die m^{te} Fläche also eben ist. Die Richtung des einfallenden Strahles sei nach wie vor durch die Werthe ω_m und θ_m bestimmt; um denselben vollends festzulegen, soll die Entfernung des Einfallspunktes B von der Achse des Systems durch y_m und die Neigung dieser Linie gegen die feste Ebene durch η_m bezeichnet werden. Es ist wieder leicht zu ersehen, dass im vorliegenden Grenzfalle

$$\omega_m - \varphi_m = 0\,, \quad \cos(\omega_m - \varphi_m) = 1$$
$$\lim r_m \sin(\omega_m - \varphi_m) = y_m \sin(\theta_m - \eta_m)$$
$$\lambda_m = -90^0$$

anzunehmen ist. Zunächst ergiebt Gleichung (141)

$$\omega_{m+1} - \psi_m = \omega_m - \varphi_m = 0, \quad \ldots\ldots \quad (141)$$
$$\lim r_m \sin(\omega_{m+1} - \psi_m) = y_m \sin(\theta_m - \eta_m);$$

während aus Gleichung (142)

$$\mu_m = -90^0\,, \quad \theta_{m+1} - \theta_m = 0 \ldots\ldots \quad (142)$$

zu folgern ist. Wird dieses in (144) berücksichtigt, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} r_{m+1} \sin\varphi_{m+1} \sin\lambda_{m+1} &= y_m \sin\eta_m \cos\omega_{m+1} \\ &+ (a_{m+1} - r_{m+1}) \sin\omega_{m+1} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (144)$$

und an Stelle von Gleichung (145)

$$r_{m+1} \sin\varphi_{m+1} \cos\lambda_{m+1} = y_m \cos\eta_m, \ldots\ldots \quad (145)$$

sobald wir bedenken, dass der an der m^{ten} Fläche einfallende und der dort gebrochene Strahl gleich weit von der Achse entfernt sind. Die Differentiation der vorstehenden Gleichungen liefert

$$r_{m+1} \sin\varphi_{m+1} \cos\lambda_{m+1}\, \partial\lambda_{m+1} + r_{m+1} \cos\varphi_{m+1} \sin\lambda_{m+1}\, \partial\varphi_{m+1}$$
$$= [(a_{m+1} - r_{m+1}) \cos\omega_{m+1} - y_m \sin\eta_m \sin\omega_{m+1}]\, \partial\omega_{m+1}$$
$$+ \sin\eta_m \cos\omega_{m+1}\, \partial y_m + y_m \cos\eta_m \cos\omega_{m+1}\, \partial\eta_m$$
$$+ \sin\omega_{m+1}(\partial a_{m+1} - \partial r_{m+1}) - \sin\varphi_{m+1} \sin\lambda_{m+1}\, \partial r_{m+1}$$

und

$$r_{m+1} \sin\varphi_{m+1} \sin\lambda_{m+1}\, \partial\lambda_{m+1} - r_{m+1} \cos\varphi_{m+1} \cos\lambda_{m+1}\, \partial\varphi_{m+1}$$
$$= -\cos\eta_m\, \partial y_m + y_m \sin\eta_m\, \partial\eta_m + \sin\varphi_{m+1} \cos\lambda_{m+1}\, \partial r_{m+1}.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die für diesen Fall entwickelten Formeln auch geeignet sind, den Einfallspunkt und Einfallswinkel, sowie die Aenderungen dieser Grössen für einen Lichtstrahl zu bestimmen, der in gegebener Richtung von einem gegebenen leuchtenden Punkte ausgeht;

3. Wenn gleichzeitig $r_m = \infty$ und $r_{m+1} = \infty$, also zwei aufeinander folgende Flächen eben sind. Wir nennen y_m und y_{m+1} die Entfernungen der Einfallspunkte an der m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Fläche von der Achse des Systems, η_m und η_{m+1} die Winkel, welche diese Linien mit der festen Ebene bilden. Es ist nun, wie im vorigen Falle,

$$\omega_{m+1} - \psi_m = \omega_m - \varphi_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

$$\lim r_m \sin(\omega_{m+1} - \psi_m) = y_m \sin(\theta_m - \eta_m)$$

$$\mu_m = -90^0, \quad \theta_{m+1} - \theta_m = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

und, wie im ersten Specialfalle,

$$\omega_{m+1} - \varphi_{m+1} = 0$$

$$\lim r_{m+1} \sin(\omega_{m+1} - \varphi_{m+1}) = y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})$$

$$\lambda_{m+1} = -90^0,$$

so dass an Stelle von (144) die Gleichung

$$y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) = y_m \sin(\theta_m - \eta_m) + a_{m+1} \operatorname{tg} \omega_{m+1}$$

tritt. Ebenso ist

$$y_{m+1} \cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1}) = y_m \cos(\theta_m - \eta_m),$$

da jede dieser Grössen die Entfernung des zwischen beiden brechenden Flächen verlaufenden Strahles von der Achse angiebt.

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhalten wir

$$\sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})\, \partial y_{m+1} = \sin(\theta_m - \eta_m)\, \partial y_m + y_m \cos(\theta_m - \eta_m)(\partial\eta_{m+1} - \partial\eta_m) + a_{m+1}\, \partial\omega_{m+1} : \cos^2\omega_{m+1} + \operatorname{tg}\omega_{m+1}\partial a_{m+1}$$

und

$$\cos(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})\, \partial y_{m+1} = \cos(\theta_m - \eta_m)\, \partial y_m + a_{m+1} \operatorname{tg}\omega_{m+1}\partial\theta_m - y_{m+1} \sin(\theta_{m+1} - \eta_{m+1})\, \partial\eta_{m+1} + y_m \sin(\theta_m - \eta_m)\, \partial\eta_m.$$